# Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

37. a) Die Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ bilden; dabei gilt

$$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\2\\s_{32}\end{pmatrix} \iff 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot s_{32} = 0 \iff s_{32} = -2,$$

und in diesem Fall sind die beiden ersten Spalten von $S$ wegen

$$\left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \left\|\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{9} = 1$$

schon orthonormierte Vektoren im euklidischen $\mathbb{R}^3$ mit dem Vektorprodukt

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},$$

so daß die Matrix $S$ genau dann orthogonal ist, wenn für ihre dritte Spalte

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}s_{13}\\s_{23}\\s_{33}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}s_{13}\\s_{23}\\s_{33}\end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

gilt. Folglich gibt es mit

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\1 & 2 & -2\\2 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

genau zwei orthogonale Matrizen von der gesuchten Gestalt.

b) Gemäß a) bilden die Spalten der orthogonalen Matrix

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\1 & 2 & 2\\2 & -2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ein Rechtssystem, und damit gilt $\det(S_1) = 1$; folglich beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_1}(x) = S_1 \cdot x$, eine Drehung. Die Drehachse $a$ stimmt als Fixpunktmenge von $\ell_{S_1}$ mit dem Eigenraum von $S_1$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ überein; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & -2 \\ 1 & 2-3 & 2 \\ 2 & -2 & 1-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow(-\frac{1}{6})\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also $a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für den Drehwinkel $\varphi$ von $\ell_{S_1}$ gilt

$$2 \cdot \cos\varphi + 1 = \mathrm{Spur}(S_1) = \frac{2+2+1}{3} = \frac{5}{3}, \quad \text{also} \quad \cos\varphi = \frac{\frac{5}{3} - 1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Ferner bilden gemäß a) die Spalten der orthogonalen Matrix

$$S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ein Linkssystem, und damit gilt $\det(S_2) = -1$; folglich beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_2}(x) = S_2 \cdot x$, keine Drehung.

c) Die orthogonale Matrix

$$S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S_2^\top = S_2$ symmetrisch, und damit beschreibt die lineare Abbildung $\ell_{S_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_2}(x) = S_2 \cdot x$, eine Orthogonalspiegelung am Eigenraum $E = \mathrm{Eig}(S_2, 1)$ von $S_2$ zum Eigenwert $\lambda = 1$; wegen

$$S_2 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 2 \\ 1 & 2-3 & -2 \\ 2 & -2 & -1-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\dim E = 3 - \mathrm{Rang}(S_2 - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2,$$

so daß

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

eine Ebene ist. Ferner ist $S_1$ wegen $S_1^\top \neq S_1$ nicht symmetrisch, so daß die lineare Abbildung $\ell_{S_1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\ell_{S_1}(x) = S_1 \cdot x$, keine Orthogonalspiegelung, insbesondere also keine Ebenenspiegelung beschriebt.

38. a) Die Matrix

$$S_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S_1^\top S_1 = E_3$ orthogonal und wegen $S_1^\top = S_1$ symmetrisch. Damit beschreibt die Abbildung $s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $s_1(x) = S_1 \cdot x$, die Spiegelung am Eigenraum $\mathrm{Eig}(S_1; 1)$ von $S_1$ zum Eigenwert 1; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also $s_1$ die Spiegelung an der Ebene $E_1 : x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0$.

b) Die gegebene Ebene $E_2 : x_1 - x_3 = 0$ besitzt das orthogonale Komplement

$$E_2^\perp = \mathbb{R} \cdot \widetilde{v} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E_2} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in E_2^\perp} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \lambda \cdot \widetilde{v} \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \widetilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 \\ x_3 + \lambda \end{pmatrix} \in E_2$$

zunächst

$$(x_1 - \lambda) - (x_3 + \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad x_1 - x_3 = 2\,\lambda,$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_{E_2}(x) &= u - \widetilde{u} = (x - \lambda \cdot \widetilde{v}) - \lambda \cdot \widetilde{v} = x - 2\lambda \cdot \widetilde{v} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - (x_1 - x_3) \cdot 1 \\ x_2 - (x_1 - x_3) \cdot 0 \\ x_3 - (x_1 - x_3) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = S_2 \cdot x \end{aligned}$$

mit

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

c) Für die Komposition $d = s_2 \circ s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $d(x) = S \cdot x$, gilt

$$S = S_2 \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wegen $S^\top S = E_3$ ist $S$ orthogonal, so daß $d$ wegen

$$\det(S) = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{27} \cdot \big( (8 + 8 + (-1)) - ((-4) + (-4) + (-4)) \big) = 1$$

eine Drehung beschreibt. Wegen

$$S - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\cdot\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{(-\frac{1}{3})\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Drehachse von $d$, und für den Drehwinkel $\sigma \in [0, \pi]$ gilt

$$2 \cos\sigma + 1 = \mathrm{Spur}(S) = 2, \qquad \text{also} \qquad \cos\sigma = \frac{1}{2};$$

es ist also $d$ eine Drehung um einen Drehwinkel $\sigma = \pm\frac{\pi}{3}$.

39. Wir ergänzen den normierten Richtungsvektor der Drehachse

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{durch} \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$. Bei den zu betrachtenden Drehungen bleibt $b_1$ als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehung um den Winkel $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ in der von $b_2$ und $b_3$ aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix $M$ der Drehung bezüglich $b_1$, $b_2$, $b_3$ ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_\varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{mit} \qquad D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

also

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = D_1^\top,$$

und damit

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = M_1^\top.$$

Mit

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

gilt für die Abbildungsmatrix $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dieser Drehung dann $M = P^\top AP$, also

$$\begin{aligned}
A_1 &= PM_1P^\top \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2+2\sqrt{3} & -2+2\sqrt{3} \\ 2-2\sqrt{3} & 2 & -2-2\sqrt{3} \\ -2-2\sqrt{3} & -2+2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & -1-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

sowie

$$A_2 = PM_2P^\top = PM_1^\top P^\top = A_1^\top = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & -1-\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

40. a) Mit der Drehmatrix

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3};$$

damit beschreibt eine lineare Abbildung $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich einer Orthonormalbasis $b_1$, $b_2$, $b_3$ von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

besitzt, eine Drehung mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot b_3$ und dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

können wir also

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen; bei der Reihenfolge $b_2$, $b_1$, $b_3$ wird die entsprechende Drehung mit dem entgegengesetzten Drehsinn betrachtet.

b) Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

ergibt sich für die darstellende Matrix von $d$ bezüglich der Standardbasis $e_1$, $e_2$, $e_3$ von $\mathbb{R}^3$, also für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von $d$ mit $d(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$, über den Basiswechsel $P^\top AP = M$ damit

$$A = PMP^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^\top =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

für die entsprechende Drehung mit dem entgegengesetzten Drehsinn erhält man die Abbildungsmatrix $A^\top = A^{-1} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

c) Es ist nicht möglich, dass die Drehung $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich einer Basis $c_1$, $c_2$, $c_3$ von $\mathbb{R}^3$ eine darstellende Matrix in Diagonalgestalt besitzt; ansonsten wäre der Endomorphismus $d$ von $\mathbb{R}^3$ und damit jede seiner darstellenden Matrizen, also auch die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisierbar. Dies ist aber nicht der Fall, da ihr charakteristisches Polynom

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}}$$

$$= (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot \underbrace{\left[ \left( \tfrac{1}{2} - \lambda \right)^2 + \tfrac{3}{4} \right]}_{>0}$$

nicht vollständig in Linearfaktoren zerfällt.