MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 9
15.06.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

33. Die gegebene Ebene $E = \langle v_1, v_2 \rangle$ mit den beiden (linear unabhängigen) Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

besitzt das orthogonale Komplement

$$E^\perp = \langle v_3 \rangle \qquad \text{mit} \qquad v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und folglich die Darstellung

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid -2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in E^\perp} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \lambda \cdot v_3 \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot v_3 = \begin{pmatrix} x_1 + 2\,\lambda \\ x_2 - 2\,\lambda \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} \in E$$

zunächst

$$-2\,(x_1 + 2\,\lambda) + 2\,(x_2 - 2\,\lambda) + (x_3 - \lambda) = 0,$$

also

$$-2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 = 9\,\lambda \quad \text{und damit} \quad \lambda = \tfrac{1}{9}\,(-2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3)$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_E(x) &= u - \widetilde{u} = (x - \lambda \cdot v_3) - \lambda \cdot v_3 = x - 2\lambda \cdot v_3 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{9} \cdot (-2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3) \cdot (-2) \\ x_2 - \frac{2}{9}\,(-2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3) \cdot 2 \\ x_3 - \frac{2}{9}\,(-2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} x_1 + 8\,x_2 + 4\,x_3 \\ 8\,x_1 + x_2 - 4\,x_3 \\ 4\,x_1 - 4\,x_2 + 7\,x_3 \end{pmatrix} = A \cdot x \end{aligned}$$

mit

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

34. Es wird der euklidische $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ betrachtet.

a) Die beiden gegebenen Vektoren $v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}^4$ sind gemäß

$$v_1 \circ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0$$

orthogonal, so daß der davon erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ die Orthonormalbasis

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\, v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\, v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt. Mit der Hilfsmatrix $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt ferner

$$U^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid B^\top x = 0\right\},$$

und wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{I+II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$; wir unterwerfen diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_3\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|}\cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$a_4 = v_4 - (v_4 \circ b_3)\cdot b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_4\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|a_4\|} \cdot a_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so daß b_3, b_4 wegen $\langle b_3, b_4 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ ist. Insgesamt ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^4, \circ)$.

b) Für die Spiegelung $s_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ am Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ gilt

$$s_U(b_1) = b_1 \quad \text{und} \quad s_U(b_2) = b_2 \quad \text{für} \quad b_1,\, b_2 \in U$$

sowie

$$s_U(b_3) = -b_3 \quad \text{und} \quad s_U(b_4) = -b_4 \quad \text{für} \quad b_3,\, b_4 \in U^\perp;$$

für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von s_U gilt demnach

$$A \cdot b_1 = b_1, \quad A \cdot b_2 = b_2 \quad \text{sowie} \quad A \cdot b_3 = -b_3, \quad A \cdot b_4 = -b_4,$$

und mit den beiden Hilfsmatrizen

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad Q = (b_1, b_2, -b_3, -b_4) \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

ergibt sich

$$A \cdot P = A \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3, A \cdot b_4) = (b_1, b_2, -b_3, -b_4) = Q,$$

also

$$\begin{aligned} A &= Q \cdot P^{-1} \underset{P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})}{=} Q \cdot P^\top = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

35. a) Die gegebene Matrix

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß

$$S \cdot S^\top = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal sowie gemäß $S^\top = S$ auch symmetrisch; damit beschreibt S eine Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ am Eigenraum $U = \mathrm{Eig}(S,1)$ von S zum Eigenwert $\lambda = 1$. Wegen

$$S - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3 & -2 & -2 \\ -2 & 1-3 & -2 \\ -2 & -2 & 1-3 \end{pmatrix} \underset{-\frac{3}{2}\cdot\mathrm{III}}{\overset{-\frac{3}{2}\cdot\mathrm{I},\,\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim U = 3 - \mathrm{Rang}(S - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2;$$

damit ist U eine Ebene, und es gilt

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

b) Die Einträge auf der Hauptdiagonale der gegebenen Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

stimmen mit ihren Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$ überein. Ferner ist die Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß a) sowohl symmetrisch als auch orthogonal, so daß die zu betrachtende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß

$$A = S \cdot D \cdot S \underset{S^\top = S}{=} S^\top \cdot D \cdot S \underset{S^{-1} = S^\top}{=} S^{-1} \cdot D \cdot S$$

zur Matrix D ähnlich ist; folglich besitzt A dieselben Eigenwerte wie D, also $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$.

36. a) Die gegebene Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ besitzt das orthogonale Komplement

$$E^\perp = \langle \widetilde{u}_E \rangle \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E} + \underbrace{\lambda \cdot \widetilde{u}_E}_{\in E^\perp} \qquad \text{für ein} \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} x_1 - 2\lambda \\ x_2 + \lambda \\ x_3 + \lambda \end{pmatrix} \in E$$

zunächst

$$2(x_1 - 2\lambda) - (x_2 + \lambda) - (x_3 + \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad 2x_1 - x_2 - x_3 = 6\lambda,$$

und damit $\lambda = \frac{1}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3)$ folgt. Somit ist

$$\sigma(x) = x - 2\,\lambda\,\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3)\cdot 2 \\ x_2 - \frac{2}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3)\cdot(-1) \\ x_3 - \frac{2}{6}\,(2x_1 - x_2 - x_3)\cdot(-1) \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} = A_\sigma \cdot x$$

mit

$$A_\sigma = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Des weiteren besitzt die gegebene Gerade

$$g = \mathbb{R}\cdot u_g \qquad \text{mit} \qquad u_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

das orthogonale Komplement $g^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0\}$. Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{\mu \cdot u_g}_{\in g} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in g^\perp} \qquad \text{für ein} \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$\widetilde{u} = x - \mu \cdot u_g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - \mu \\ x_3 + \mu \end{pmatrix} \in g^\perp$$

zunächst

$$(x_2 - \mu) - (x_3 + \mu) = 0, \qquad \text{also} \qquad x_2 - x_3 = 2\mu,$$

und damit $\mu = \frac{1}{2}\,(x_2 - x_3)$ folgt. Somit ist

$$\delta(x) = 2\,\mu\,u_g - x = \begin{pmatrix} (x_2 - x_3)\cdot 0 - x_1 \\ (x_2 - x_3)\cdot 1 - x_2 \\ (x_2 - x_3)\cdot(-1) - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix} = A_\delta \cdot x$$

mit

$$A_\delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Hintereinanderausführung $\varphi = \sigma \circ \delta$ besitzt damit die Abbildungsmatrix

$$A = A_\sigma \cdot A_\delta = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Abbildungsmatrix A von φ ist wegen

$$A^\top A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und wegen $A^\top = A$ symmetrisch; folglich ist φ die Orthogonalspiegelung in $(\mathbb{R}^3, \circ)$ am Unterraum

$$U = \mathrm{Eig}(A; 1) \qquad \text{mit} \qquad U^\perp = \mathrm{Eig}(A; -1).$$

Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(A - E_3) = 1$, also $\dim \mathrm{Eig}(A; 1) = 2$; folglich ist U eine Ebene, und es gilt

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$