

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“ — Lösungsvorschlag —

29. a) Die gegebene Matrix

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

ist wegen

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal und besitzt dabei die Gestalt der Spiegelungsmatrix

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \cos \varphi = \frac{3}{5} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = -\frac{4}{5}.$$

Damit ist der Endomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = A \cdot x$, eine Geraden-
spiegelung in (\mathbb{R}^2, \circ) mit dem Eigenraum $\text{Eig}(A; 1)$ von A zum Eigenwert 1
als Spiegelachse a ; wegen

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{(-5) \cdot I} \\ \xrightarrow{(-5) \cdot II} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{II - 2I} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$a = \text{Eig}(A; 1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die gegebene Spiegelachse

$$b = \mathbb{R} \cdot v \quad \text{mit} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

besitzt die Lotgerade

$$b^\perp = \mathbb{R} \cdot v^\perp \quad \text{mit} \quad v^\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Geradenspiegelung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = B \cdot x$, an der Spiegelachse
 b gilt nun

$$g(v) = v, \quad \text{also} \quad B \cdot v = v, \quad \text{und} \quad g(v^\perp) = -v^\perp \quad \text{also} \quad B \cdot v^\perp = -v^\perp,$$

so daß sich

$$B \cdot (v, v^\perp) = (B \cdot v, B \cdot v^\perp) = (v, -v^\perp)$$

und damit

$$\begin{aligned} B &= (v, -v^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned}$$

ergibt.

- c) Die Hintereinanderausführung $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der beiden Endomorphismen g und f besitzt die Abbildungsmatrix

$$C = B \cdot A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 25 \\ -25 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit stimmt C mit der Drehmatrix

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

überein; damit beschreibt $g \circ f$ eine Drehung um den Winkel $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

30. a) Eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ bildet den zu $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor

$$v^\perp = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{der Länge} \quad \|v^\perp\| = \sqrt{(-11)^2 + 7^2} = \sqrt{170}$$

auf einen zu $w = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrechten Vektor x (wegen der Winkeltreue) der Länge $\|x\| = \sqrt{170}$ (wegen der Längentreue) ab; damit ist aber

$$f(v^\perp) = \pm w^\perp \quad \text{mit} \quad w^\perp = \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Für $f_1 = \ell_{A_1}$ mit $f_1(v) = w$ und $f_1(v^\perp) = w^\perp$ gilt

$$A_1 \cdot (v, v^\perp) = (A_1 \cdot v, A_1 \cdot v^\perp) = (w, w^\perp)$$

und damit

$$\begin{aligned} A_1 &= (w, w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & -1 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -13 & -1 \\ 1 & -13 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{170} \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -11 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{170} \begin{pmatrix} -80 & -150 \\ 150 & -80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

und für $f_2 = \ell_{A_2}$ mit $f_2(v) = w$ und $f_2(v^\perp) = -w^\perp$ gilt

$$A_2 \cdot (v, v^\perp) = (A_2 \cdot v, A_2 \cdot v^\perp) = (w, -w^\perp)$$

und damit

$$\begin{aligned} A_2 &= (w, -w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{170} \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -11 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{170} \begin{pmatrix} -102 & -136 \\ -136 & 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

man sieht sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind.

Alternativ kann man auch die allgemeine Gestalt

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

orthogonaler 2×2 -Matrizen ansetzen und $\varphi \in \mathbb{R}$ so bestimmen, daß

$$D_\varphi \cdot v = w \quad \text{bzw.} \quad S_\varphi \cdot v = w$$

erfüllt ist. Für D_φ ergibt sich dabei

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} 7 \cos \varphi - 11 \sin \varphi &= -13 \\ 7 \sin \varphi + 11 \cos \varphi &= 1 \end{aligned}$$

woraus man durch $7 \cdot (\text{I}) + 11 \cdot (\text{II})$

$$170 \cos \varphi = -80, \quad \text{also} \quad \cos \varphi = -\frac{8}{17},$$

sowie durch $11 \cdot (\text{I}) - 7 \cdot (\text{II})$

$$-170 \sin \varphi = -150, \quad \text{also} \quad \sin \varphi = \frac{15}{17},$$

zusammen also

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \\ \frac{15}{17} & -\frac{8}{17} \end{pmatrix},$$

erhält; für S_φ ergibt sich dagegen

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} 7 \cos \varphi + 11 \sin \varphi &= -13 \\ 7 \sin \varphi - 11 \cos \varphi &= 1 \end{aligned}$$

woraus man durch $7 \cdot (\text{I}) - 11 \cdot (\text{II})$

$$170 \cos \varphi = -102, \quad \text{also} \quad \cos \varphi = -\frac{3}{5},$$

sowie durch $11 \cdot (\text{I}) + 7 \cdot (\text{II})$

$$170 \sin \varphi = -136, \quad \text{also} \quad \sin \varphi = -\frac{4}{5},$$

zusammen also

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

erhält; Man überprüft sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind, die v auf w abbilden.

- b) Wegen $\det(A_1) = 1$ ist f_1 orientierungstreu; f_1 bildet ja das Rechtssystem v, v^\perp auf das Rechtssystem w, w^\perp ab. Die Abbildung f_1 beschreibt eine Drehung um den Ursprung, wobei für den Drehwinkel φ gilt $\cos \varphi = -\frac{8}{17}$. Wegen $\det(A_2) = -1$ ist f_2 orientierungsumkehrend; f_2 bildet ja das Rechtssystem v, v^\perp auf das Linkssystem $w, -w^\perp$ ab. Die Abbildung f_2 beschreibt eine Achsenspiegelung mit der Spiegelachse $\mathbb{R} \cdot a = \text{Eig}(A_2; 1)$; wegen

$$A_2 - E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{(-5) \cdot I} \\ \xrightarrow{10 \cdot II} \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{II+I} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist etwa $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

31. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_S(\lambda) &= \det(S - \lambda \cdot E_2) = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & 24 \\ 24 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = (-7 - \lambda)(7 - \lambda) - 24^2 = \\ &= (-49 + \lambda^2) - 576 = \lambda^2 - 625 = \lambda^2 - 25^2 = (\lambda - 25)(\lambda + 25); \end{aligned}$$

damit besitzt S die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 25$ und $\lambda_2 = -25$. Wegen

$$S - \lambda_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -32 & 24 \\ 24 & -18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\frac{1}{8} \cdot I} \\ \xrightarrow{\frac{1}{6} \cdot II} \end{matrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{II+I} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(S; \lambda_1 = 25)$, und damit

sind die vom Nullvektor verschiedenen skalaren Vielfachen $\alpha \cdot u_1 = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix}$ von u_1 mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ genau die Eigenvektoren der Matrix S zum Eigenwert $\lambda_1 = 25$. Des weiteren ist wegen

$$S - \lambda_2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 18 & 24 \\ 24 & 32 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\frac{1}{6} \cdot I} \\ \xrightarrow{\frac{1}{8} \cdot II} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{II-I} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(S; \lambda_1 = -25)$, und damit

sind die vom Nullvektor verschiedenen skalaren Vielfachen $\beta \cdot u_2 = \begin{pmatrix} -4\beta \\ 3\beta \end{pmatrix}$ von u_2 mit $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ genau die Eigenvektoren der Matrix S zum Eigenwert $\lambda_1 = -25$.

- b) Die Matrix $A = \frac{1}{25}S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist wegen

$$A^T \cdot A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{625} \begin{pmatrix} 625 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal und besitzt die Determinante

$$\det(A) = \frac{1}{25^2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{625} ((-7) \cdot 7 - 24 \cdot 24) = \frac{1}{625} \cdot (-625) = -1.$$

Damit ist $A = \frac{1}{25}S$ eine Spiegelungsmatrix in der orthogonalen Gruppe $O_2(\mathbb{R})$ und beschreibt damit die Achsenspiegelung am Eigenraum $\text{Eig}(A; 1)$ zum Eigenwert 1; der Vektor u_1 aus a) ist wegen

$$A \cdot u_1 = \left(\frac{1}{25}S\right) \cdot u_1 = \frac{1}{25} \cdot (S \cdot u_1) \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{1}{25} \cdot (25 \cdot u_1) = \left(\frac{1}{25} \cdot 25\right) \cdot u_1 = 1 \cdot u_1$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1, und damit ergibt sich für die Spiegelungsachse $a = \text{Eig}(A; 1) = \mathbb{R} \cdot u_1$.

32. Die gesuchte Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der linearen Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

die die Spiegelung an der Geraden g mit der Gleichung $2x - y = 0$ beschreibt, läßt sich auf verschiedenen Wegen ermitteln:

- Die gegebene Gerade g mit der Gleichung $2x - y = 0$ besitzt den Normalenvektor $\tilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der Lotfußpunkt p_0 des Punktes $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf der Geraden g besitzt (als Punkt auf der Lotgeraden von p auf g) die Gestalt

$$p_0 = p + \lambda \cdot \tilde{u} = \begin{pmatrix} x + 2\lambda \\ y - \lambda \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei sich wegen $p_0 \in g$ dann

$$2(x + 2\lambda) - (y - \lambda) = 0, \quad \text{also} \quad \lambda = -\frac{2x - y}{5},$$

und somit

$$p_0 = \begin{pmatrix} x + 2\left(-\frac{2x - y}{5}\right) \\ y - \left(-\frac{2x - y}{5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix}$$

ergibt; der Bildpunkt $f(p)$ des Punktes p unter der Spiegelung f an der Geraden g ist demnach

$$\begin{aligned} f(p) &= \underbrace{p + (p_0 - p)}_{=p_0} + (p_0 - p) = 2p_0 - p = \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y \\ \frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ von f ergibt sich wegen

$$f(p) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y \\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot p$$

demnach

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- Die gegebene Gerade g mit der Gleichung $2x - y = 0$ besitzt den Richtungsvektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie den Normalenvektor $\tilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Für die Spiegelung f an der Geraden g gilt nun

$$f(u) = u \quad \text{und} \quad f(\tilde{u}) = -\tilde{u},$$

so daß sich für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ von f damit

$$A \cdot u = u \quad \text{und} \quad A \cdot \tilde{u} = -\tilde{u}$$

ergibt; mit den Matrizen

$$B = (u, \tilde{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = (u, -\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man also

$$A \cdot B = A \cdot (u, \tilde{u}) = (A \cdot u, A \cdot \tilde{u}) = (u, -\tilde{u}) = C.$$

Wegen $\det(B) = -5 \neq 0$ ist die Matrix B invertierbar, und für die gesuchte Abbildungsmatrix A erhält man

$$\begin{aligned} A = C \cdot B^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

- Da die gegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Ursprungsgeraden g beschreibt, besitzt ihre Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Gestalt einer Spiegelungsmatrix

$$A = S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

mit einem geeigneten Parameter $\varphi \in \mathbb{R}$. Die Gerade g mit der Gleichung $2x - y = 0$ besitzt nun den Richtungsvektor $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und für diesen gilt $f(u) = u$ und damit

$$A \cdot u = u, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für das resultierende lineare Gleichungssystem (in $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$)

$$(I) \quad \cos \varphi + 2 \sin \varphi = 1 \quad \text{und} \quad (II) \quad \sin \varphi - 2 \cos \varphi = 2$$

ergibt sich über „(I) $- 2 \cdot$ (II)“ zum einen $5 \cos \varphi = -3$, also $\cos \varphi = -\frac{3}{5}$, und über „ $2 \cdot$ (I) $+ \cdot$ (II)“ zum anderen $5 \sin \varphi = 4$, also $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, insgesamt also

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$