MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 7
01.06.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II" — Lösungsvorschlag —

25. Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar; dabei ist zunächst wegen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1$$

v_1 ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$. Ferner gilt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{=}} \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2\lambda-18 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2\lambda-18 & 9-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -(\lambda-9) & 2(\lambda-9) & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2(\lambda-9) & -(\lambda-9) \end{vmatrix} \underset{(\lambda-9) \text{ aus III}}{\overset{(\lambda-9) \text{ aus I}}{=}} (\lambda-9)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda-9)^2 \cdot [((8-\lambda)+0+0) - (0+4+4)] = -\lambda \cdot (\lambda-9)^2$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt die Matrix A neben dem (bereits bestimmten) einfachen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 9$. Wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A,9) = \mathrm{Eig}(A,0)^\perp$; damit ist aber

$$v_2' = v_1 \times v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wegen $v_2' \perp v_1$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 9$ mit $v_2' \perp v_3$. Folglich ist v_1, v_2', v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus paarweise orthogonalen Eigenvektoren der Matrix A, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt dann $P^\top A P = D$.

26. a) Aufgrund ihrer Symmetrie ist die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$A - (-1) \cdot E_3 = A + E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(A - (-1) \cdot E_3) = 1$; damit ist $\lambda_1 = -1$ ein Eigenwert von A der Vielfachheit 2, und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$. Damit besitzt A einen zweiten Eigenwert λ_2 der Vielfachheit 1 mit $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2) = \mathrm{Eig}(A; \lambda_1)^\perp$; folglich ist der Vektor

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$, und wegen

$$A \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \cdot v_3$$

ergibt sich $\lambda_2 = 8$.

b) Wegen $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1) = \mathrm{Eig}(A;\lambda_2)^\perp$ ist

$$v_1' = v_2 \times v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein (auf v_2 senkrecht stehender) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1, und folglich bilden

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2\sqrt{5} \\ -5 & 0 & 2\sqrt{5} \\ 2 & -6 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

erhält man somit, daß $P^\top A P = D$ Diagonalgestalt besitzt.

c) Für

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt $F^3 = D$, und für

$$\begin{aligned} B &= PFP^\top \\ &= \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2\sqrt{5} \\ -5 & 0 & 2\sqrt{5} \\ 2 & -6 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2\sqrt{5} \\ -5 & 0 & 2\sqrt{5} \\ 2 & -6 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \\ 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 15 & 60 & 30 \\ 60 & 15 & 30 \\ 30 & 30 & -30 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \end{aligned}$$

erhält man damit

$$B^3 = (PFP^\top)^3 = PF^3P^\top = PDP^\top = P(P^\top AP)P^\top = A.$$

27. a) Für $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ erhalten wir

$$\left(SMS^{-1}\right)^2 = \left(SMS^{-1}\right) \cdot \left(SMS^{-1}\right) = SM\underbrace{S^{-1}S}_{=E_n}MS^{-1} = SM^2S^{-1}.$$

b) Für die diagonalisierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von B zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$; mit der invertierbaren Matrix $S = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und der Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ergibt sich $D = S^{-1}BS$ bzw. $SDS^{-1} = B$. Da für die Eigenwerte von B nach Voraussetzung $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$ gilt, existiert ferner die Matrix $F = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $F^2 = D$, und für die Matrix $A = SFS^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt unter Verwendung von a)

$$A^2 = \left(SFS^{-1}\right)^2 \underset{\text{a)}}{=} SF^2S^{-1} = SDS^{-1} = B.$$

c) Für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ 9 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (10-\lambda)\cdot(-5-\lambda) + 54 = \lambda^2 - 5\,\lambda + 4 = (\lambda - 1)\cdot(\lambda - 4)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt B die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$. Wegen

$$B - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(B; \lambda_1)$, und wegen

$$B - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{9}}{\overset{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{6}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(B; \lambda_2)$. Mit der invertierbaren Matrix

$$S = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ergibt sich damit $D = S^{-1}BS$ bzw. $SDS^{-1} = B$. Für $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $F^2 = D$, und für die Matrix

$$A = SFS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt gemäß b) die Beziehung $A^2 = B$.

28. Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Fibonaccizahlen $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$.

a) Wir zeigen für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion die Beziehung

$$\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n .$$

- „$n = 1$“:

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_1 + f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- „$n \to n+1$“:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} + f_n \\ f_{n+1} & f_n + f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{pmatrix}.$$

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_F(\lambda) = \det(F - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

mit

$$\chi_F(\lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

damit besitzt F die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Insbesondere ist F diagonalisierbar. Wegen

$$F - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\cdot 2}{\leadsto} \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$
$$\underset{\mathrm{II}\cdot(1+\sqrt{5})}{\leadsto} \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 2+2\sqrt{5} & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+4\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(F;\lambda_1)$ mit

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{2}};$$

damit ist

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(F;\lambda_1)$, und folglich ist

$$b_2 = b_1^\perp = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ -1\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(F;\lambda_2)$. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dann $P^\top F P = D$.

c) Gemäß b) erhalten wir aus $D = P^\top F P$ für die Matrix F die Darstellung $F = PDP^\top$ und damit für ihre n–te Potenz $F^n = \left(PDP^\top\right)^n = PD^nP^\top$; dabei ist

$$P = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\begin{pmatrix}1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}\,\lambda_1}}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ \lambda_1 & -1\end{pmatrix}$$

und

$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad D^n = \begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}f_n\\ f_{n+1}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}f_{n-1} & f_n\\ f_n & f_{n+1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= F^n\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = PD^nP^\top\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}\,\lambda_1}}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ \lambda_1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}\,\lambda_1}}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1\\ \lambda_1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\,\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & \lambda_1\lambda_2^n\\ \lambda_1^{n+1} & -\lambda_2^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}\,\lambda_1}\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1^n-\lambda_2^n)\\ \lambda_1^{n+2}+\lambda_2^n\end{pmatrix};
\end{aligned}$$

somit ist

$$\begin{aligned}
f_n = \frac{1}{\sqrt{5}\,\lambda_1}\cdot\lambda_1\cdot(\lambda_1^n-\lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n-\lambda_2^n) &=\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

eine mögliche explizite Darstellung für die Fibonaccizahlen f_n mit $n\in\mathbb{N}_0$.