MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 6
25.05.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

21. Die beiden gegebenen Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sind offensichtlich linear unabhängig und damit eine Basis von $W = \langle w_1, w_2 \rangle$. Die Anwendung des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert dann im ersten Schritt $\|w_1\| = \sqrt{3}$ und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = w_2 - (w_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{9}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\|a_2\| = \sqrt{3}$ und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ bilden damit b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von W. Für die Orthogonalprojektion $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf den Unterraum W gilt damit

$$P(x) = (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^4$. Mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erhält man demnach

$$x \circ b_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{x_1 - x_3 + x_4}{\sqrt{3}}$$

$$x \circ b_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{x_2 - x_3 - x_4}{\sqrt{3}}$$

und damit

$$\begin{aligned} P(x) &= (x \circ b_1) \cdot b_1 + (x \circ b_2) \cdot b_2 \\ &= \frac{x_1 - x_3 + x_4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_2 - x_3 - x_4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ 0 \\ -(x_1 - x_3 + x_4) \\ x_1 - x_3 + x_4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 \\ -(x_2 - x_3 - x_4) \\ -(x_2 - x_3 - x_4) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 - x_4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$P(x) = x \qquad \text{mit} \qquad A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4};$$

damit ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die gesuchte Abbildungsmatrix von P.

22. Die gegebene 4×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ist gemäß $A^\top = A$ symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar.

a) Für $\lambda_1 = -2$ ist

$$A - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_1 \cdot E_4) = 1 < 4;$$

damit ist $\lambda_1 = -2$ ein Eigenwert von A, und

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda_1)$. Für $\lambda_2 = 2$ ist

$$A - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}-\mathrm{I},\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{IV}+3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}+\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda_2 \cdot E_4) = 3 < 4;$$

damit ist $\lambda_2 = 2$ ein Eigenwert von A, und

$$u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda_2)$. Damit ist u_1, u_2, u_3, u_4 bereits eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A, so daß A keinen weiteren Eigenwert besitzen kann; dieser würde ja einen weiteren linear unabhängigen Eigenvektor beisteuern.

b) Wir konstruieren für jeden der beiden Eigenräume jeweils eine Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarprodukts)

Für den Eigenraum $\operatorname{Eig}(A,\lambda_1)$ unterwerfen wir die in a) ermittelte Basis dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

damit

$$a_2 = u_2 - (u_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\begin{aligned} a_3 &= u_3 - (u_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (u_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{12}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1)$. Der Basisvektor u_4 von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_2)$ ist dagegen nur zu normieren mit

$$\|u_4\| = 2, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|u_4\|} \cdot u_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren der Matrix A, und mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

ergibt sich dann $P^\top A P = D$.

23. a) Zunächst steht $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf dem gegebenen Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ wegen $u_1 \circ u_2 = 0$ senkrecht, so daß mit

$$u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bzw. die durch diese gegebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = U \cdot x$, besitzt genau dann u_1 als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$ und u_2, u_3 als Eigenvektoren zum Eigenwert $\mu = -2$, wenn

$$(*) \qquad U \cdot u_1 = \lambda \cdot u_1, \quad U \cdot u_2 = \mu \cdot u_2 \quad \text{und} \quad U \cdot u_3 = \mu \cdot u_3$$

bzw.

$$(**) \qquad f(u_1) = \lambda \cdot u_1, \quad f(u_2) = \mu \cdot u_2 \quad \text{und} \quad f(u_3) = \mu \cdot u_3$$

gilt. Da gemäß a) die Vektoren u_1, u_2, u_3 insbesondere eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(**)$ und damit genau eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $(*)$.

c) Für die explizite Berechnung der Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bieten sich die folgenden beide Wege an:

- Gemäß $(*)$ ergibt sich

$$U \cdot (u_1, u_2, u_3) = (U \cdot u_1,\ U \cdot u_2,\ U \cdot u_3) = (\lambda\, u_1,\ \mu\, u_2,\ \mu\, u_3),$$

also $U \cdot B = C$ mit

$$B = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und

$$C = (\lambda\, u_1,\ \mu\, u_2,\ \mu\, u_3) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da u_1, u_2, u_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, ist $B = (u_1, u_2, u_3)$ invertierbar, und es ist

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \widetilde{B} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

woraus sich dann

$$U = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ergibt.

- Die normierten Vektoren

$$\frac{u_1}{||u_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \frac{u_2}{||u_2||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \frac{u_3}{||u_3||} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von U zu den Eigenwerten $\lambda = 1$, $\mu = -2$ und $\mu = -2$, so daß sich mit der orthogonalen Matrix

$$P = \left(\frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}, \frac{u_3}{||u_3||}\right) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda,\ \mu,\ \mu) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

dann

$$D = P^\top U P \qquad \text{bzw.} \qquad U = PDP^\top =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

ergibt.

24. a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix}9 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist symmetrisch und damit orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix}9-\lambda & 2\\ 2 & 6-\lambda\end{vmatrix} =$$
$$= (9-\lambda)(6-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$; wegen

$$A - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 5$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 10$. Folglich ist

$$w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{\|v_2\|} \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren für A.

b) Gemäß a) ergibt sich für die orthogonale Matrix

$$P = (w_1, w_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$$

und die Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ \lambda_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Beziehung $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$.

c) Mit Hilfe der Beziehung aus b) ergibt sich zunächst

$$A = \left(P \cdot P^{-1}\right) \cdot A \cdot \left(P \cdot P^{-1}\right) = P \cdot \left(P^{-1} \cdot A \cdot P\right) \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1};$$

wir zeigen nun $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$A^1 = A = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^1 \cdot P^{-1}.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = \left(P \cdot D^n \cdot P^{-1}\right) \cdot \left(P \cdot D \cdot P^{-1}\right) = \\ &= P \cdot D^n \cdot \left(P^{-1} \cdot P\right) \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^n \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^{n+1} \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

d) Wegen

$$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} = 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

und

$$P^{-1} = P^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich mit Hilfe von c)

$$\begin{aligned} A^n &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{5^n}{5} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -1 & 2^{n+1} \\ 2 & 2^n \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2}+1 & 2^{n+1}-2 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n+4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$