Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

17. a) Für $B = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\cdot\text{I, IV}-4\cdot\text{I}}{\overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\overset{\text{I+III, IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit $v_3 = 3\,v_1 - 2\,v_2$; insbesondere ist v_1, v_2 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

b) Für $C = (v_1, v_2, e_1, e_2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Damit ist die Matrix $C \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ invertierbar; insbesondere bilden die Spalten v_1, v_2, e_1, e_2 von C eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Für $D = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt

$$D^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{I}+3\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$. Unterwirft man diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren, so erhält man

$$a_1 = w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{5}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = w_2 - (w_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{5}\sqrt{55}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{55}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^4$.

18. a) Die durch

$$\sigma(x, y) = x_1\, y_1 + 3\, x_2\, y_2 + 4\, x_3\, y_3 + \\ + x_1\, y_2 + x_2\, y_1 + x_1\, y_3 + x_3\, y_1 + x_2\, y_3 + x_3\, y_2$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}^3$ gegebene Bilinearform $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ besitzt die Matrixdarstellung

$$\sigma(x, y) = x^\top A y \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Wegen $A^\top = A$ ist die Matrix A und damit auch die Bilinearform σ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \left|1\right| = 1 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{II}-\text{I}}{\underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

alle positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch die Matrix A und damit auch die Bilinearform σ positiv definit.

b) Es ist

$$U = \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2 \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit den (offensichtlich linear unabhängigen) Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung des Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert dann im ersten Schritt

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\| = \sqrt{\sigma(a_1, a_1)} = \sqrt{2}$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie im zweiten Schritt

$$a_2 = v_2 - \sigma(v_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\mathbb{R} \cdot b_1 + \mathbb{R} \cdot b_2 = \mathbb{R} \cdot v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$$

bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von U bezüglich des gegebenen Skalarprodukts σ auf $\mathbb{R}^3$.

19. a) Da A eine symmetrische Matrix ist, stellt σ_A eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ dar; da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \left|4\right| = 4 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (16 + 0 + 0) - (0 + 4 + 8) = 4$$

alle positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch die Matrix A und damit auch die symmetrische Bilinearform σ_A positiv definit, folglich ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \sqrt{\sigma_A(e_1, e_1)} = \sqrt{4} = 2, \\ \|e_2\| &= \sqrt{\sigma_A(e_2, e_2)} = \sqrt{2} \quad \text{und} \\ \|e_3\| &= \sqrt{\sigma_A(e_3, e_3)} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\cos \sphericalangle(e_1, e_2) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_2)}{\|e_1\| \cdot \|e_2\|} = \frac{-2}{2 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \\
\cos \sphericalangle(e_1, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_1, e_3)}{\|e_1\| \cdot \|e_3\|} = \frac{0}{2 \cdot \sqrt{2}} = 0 \quad \text{und} \\
\cos \sphericalangle(e_2, e_3) &= \frac{\sigma_A(e_2, e_3)}{\|e_2\| \cdot \|e_3\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

also

$$\sphericalangle(e_1, e_2) = \frac{3\pi}{4} \text{ (bzw. } 135^\circ\text{)}, \qquad \sphericalangle(e_1, e_3) = \frac{\pi}{2} \text{ (bzw. } 90^\circ\text{)}$$

und

$$\sphericalangle(e_2, e_3) = \frac{2\pi}{3} \text{ (bzw. } 120^\circ\text{)}.$$

c) Wir unterwerfen die Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten zunächst

$$a_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{\sigma_A(a_1, a_1)} = 2,$$

also

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = e_2 - \sigma_A(e_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma_A(a_2, a_2)} = 1, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
a_3 = e_3 - \sigma_A(e_3 \circ b_1) \cdot b_1 - \sigma_A(e_3 \circ b_2) \cdot b_2 &= \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{\sigma_A(a_3, a_3)} = 1, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Folglich bilden die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_A)$.

d) Mit

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

leistet die invertierbare Matrix

$$P = B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

das Gewünschte.

20. In einem euklidischen Vektorraum V mit dem Skalarprodukt σ wird für einen Unterraum $U \subseteq V$ das orthogonale Komplement

$$U^\perp = \{v \in V \mid \sigma(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U\}$$

betrachtet; dies ist wiederum ein Unterraum von V. Dabei gilt für Unterräume U_1, $U_2 \subseteq V$ mit $U_1 \subseteq U_2$ wegen

$$\begin{aligned} v \in U_2^\perp \quad &\Longrightarrow \quad \sigma(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_2 \\ &\underset{U_1 \subseteq U_2}{\Longrightarrow} \quad \sigma(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U_1 \\ &\Longrightarrow \quad v \in U_1^\perp \end{aligned}$$

schon $(*)$ $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$. Somit ergibt sich für Unterräume U, $W \subseteq V$ dann:

a) Wegen

$$U \subseteq U + W \qquad \text{und} \qquad W \subseteq U + W$$

gilt gemäß $(*)$

$$(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \qquad \text{und} \qquad (U + W)^\perp \subseteq W^\perp,$$

zusammen also

$$(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp.$$

Für „$\supseteq$“ sei $v \in U^\perp \cap W^\perp$; damit gilt sowohl

$$v \in U^\perp, \qquad \text{also} \qquad \sigma(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad u \in U,$$

als auch

$$v \in W^\perp, \qquad \text{also} \qquad \sigma(w, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad w \in W.$$

Für alle $x \in U + W$ gibt es nun $u \in U$ und $w \in W$ mit $x = u + w$, so dass sich wegen der Linearität von σ im 1. Argument dann

$$\sigma(x, v) = \sigma(u + w, v) = \sigma(u, v) + \sigma(w, v) = 0 + 0 = 0$$

ergibt; damit ist aber $v \in (U + W)^\perp$.

b) Wegen

$$U \cap W \subseteq U \qquad \text{und} \qquad U \cap W \subseteq W$$

gilt gemäß $(*)$

$$U^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp \qquad \text{und} \qquad W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp\,,$$

zusammen also

$$U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp\,.$$