MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 4
11.05.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

13. a) Zu betrachten ist die durch $\sigma_B(x,y) = x^\top B y$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

definierte Bilinearform des $\mathbb{R}^3$; zunächst ist wegen $B^\top = B$ die Matrix B und damit auch die Bilinearform σ_B symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(B_1) = \det(1) = 1 > 0,$$

$$\det(B_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\det(B_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (12 + 6 + 6) - (8 + 9 + 6) = 1 > 0$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix B und damit auch die Bilinearform σ_B positiv definit; folglich ist σ_B ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

b) Es ist

$$\sigma_B(e_1, e_1) = e_1^\top B e_1 = 1, \qquad \text{also} \qquad \|e_1\| = \sqrt{\sigma_B(e_1, e_1)} = 1,$$

und

$$\sigma_B(e_2, e_2) = e_2^\top B e_2 = 2, \qquad \text{also} \qquad \|e_2\| = \sqrt{\sigma_B(e_2, e_2)} = \sqrt{2},$$

sowie

$$\sigma_B(e_1, e_2) = e_1^\top B e_2 = 1,$$

so daß sich für den Winkel φ zwischen e_1 und e_2 wegen

$$\cos\varphi = \frac{\sigma_B(e_1, e_2)}{\|e_1\| \cdot \|e_2\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

dann $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\varphi = 45°$ ergibt.

14. Wir betrachten die durch die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegebene Bilinearform

$$\sigma_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_A(x,y) = x^\top A y,$$

auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Für die beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad B = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gilt dabei:

$$\left.\begin{array}{lcl} \sigma_A(v_1,v_1) = 1 & \Longleftrightarrow & v_1^\top A v_1 = 1 \\ \sigma_A(v_1,v_2) = 0 & \Longleftrightarrow & v_1^\top A v_2 = 0 \\ \sigma_A(v_2,v_1) = 0 & \Longleftrightarrow & v_2^\top A v_1 = 0 \\ \sigma_A(v_2,v_2) = 1 & \Longleftrightarrow & v_2^\top A v_2 = 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow B^\top A B = E_2,$$

dies ist aber zu

$$A = \left(B^\top\right)^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$$

gleichwertig.

Damit gibt es höchstens ein Skalarprodukt σ auf dem $\mathbb{R}^2$, bezüglich dem v_1, v_2 eine Orthonormalbasis bilden, nämlich $\sigma = \sigma_A$ mit der eben bestimmten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Da aber A symmetrisch und wegen $34 > 0$ und $\det(A) = 1 > 0$ nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz auch positiv definit ist, stellt σ_A tatsächlich ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^2$ mit den gewünschten Eigenschaften dar.

15. a) Für alle A, A', $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sigma(A + A', B) = \operatorname{Spur}((A + A')\, B) = \operatorname{Spur}(A\, B + A'\, B) =$$
$$= \operatorname{Spur}(A\, B) + \operatorname{Spur}(A'\, B) = \sigma(A,B) + \sigma(A',B)$$

und

$$\sigma(\lambda \cdot A, B) = \operatorname{Spur}((\lambda \cdot A)\, B) = \operatorname{Spur}(\lambda \cdot (A\, B)) =$$
$$= \lambda \cdot \operatorname{Spur}(A\, B) = \lambda \cdot \sigma(A,B)$$

sowie

$$\sigma(A,B) = \operatorname{Spur}(A\, B) = \operatorname{Spur}(B\, A) = \sigma(B,A).$$

Da sich die nachgewiesene Linearität im ersten Argument aufgrund der gezeigten Symmetrie auch auf das zweite Argument überträgt, ist σ eine symmetrische Bilinearform auf V.

Ferner gilt für alle A, A', $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tau(A+A',B) &= \mathrm{Spur}((A+A')^\top B) = \\ &= \mathrm{Spur}((A^\top + A'^\top)B) = \mathrm{Spur}(A^\top B + A'^\top B) = \\ &= \mathrm{Spur}(A^\top B) + \mathrm{Spur}(A'^\top B) = \tau(A,B) + \tau(A',B)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tau(\lambda\cdot A,B) &= \mathrm{Spur}((\lambda\cdot A)^\top B) = \mathrm{Spur}((\lambda\cdot A^\top)\,B) = \\ &= \mathrm{Spur}(\lambda\cdot(A^\top B)) = \lambda\cdot\mathrm{Spur}(A^\top B) = \lambda\cdot\tau(A,B)\end{aligned}$$

sowie

$$\tau(A,B) = \mathrm{Spur}(A^\top B) = \mathrm{Spur}((A^\top B)^\top) = \mathrm{Spur}(B^\top A) = \tau(B,A).$$

Da sich erneut die nachgewiesene Linearität im ersten Argument aufgrund der gezeigten Symmetrie auch auf das zweite Argument überträgt, ist τ eine symmetrische Bilinearform auf V.

b) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\sigma(A,A) = \mathrm{Spur}(A^2) = -2 < 0;$$

damit ist σ nicht positiv definit und folglich kein Skalarprodukt auf V.
Für $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $C = (c_{ij})_{i,j}$ mit $C = A^\top A$; für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$ gilt $c_{kk} = a_{1k}^2 + \ldots + a_{nk}^2$ und damit

$$\tau(A,A) = \mathrm{Spur}(A^\top A) = \mathrm{Spur}(C) = \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jk}^2 \geq 0,$$

und aus $\tau(A,A) = 0$ folgt $a_{jk} = 0$ für alle j, $k \in \{1,\ldots,n\}$, also $A = 0$. Damit ist τ positiv definit und folglich ein Skalarprodukt auf V.

16. Für alle v, $w \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \sigma(v+w,v+w) = \sigma(v,v+w) + \sigma(w,v+w) = \\ &= (\sigma(v,v)+\sigma(v,w)) + (\sigma(w,v)+\sigma(w,w)) = \|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\|v-w\|^2 &= \sigma(v-w,v-w) = \sigma(v,v-w) - \sigma(w,v-w) = \\ &= (\sigma(v,v)-\sigma(v,w)) - (\sigma(w,v)-\sigma(w,w)) = \|v\|^2 - 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2;\end{aligned}$$

diese Ergebnisse finden im folgenden Verwendung.

a) Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\,\|v+w\|^2 - \tfrac{1}{4}\,\|v-w\|^2 &= \tfrac{1}{4}\,(\|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2) - \\ &\quad - \tfrac{1}{4}\,(\|v\|^2 - 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2) = \sigma(v,w).\end{aligned}$$

b) Es ergibt sich

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \left(\|v\|^2 - 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2\right) + \\ + \left(\|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2\right) = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right).$$

(Die Bezeichnung „Parallelogrammgleichung“ erklärt sich wie folgt: Wir betrachten das von den Vektoren v und w aufgespannte Parallelogramm mit dem Eckpunkten 0, v, $v+w$ und w. Die Seiten zwischen 0 und v sowie $v+w$ und w besitzen jeweils die Länge $\|v\|$, die Seiten zwischen v und $v+w$ sowie w und 0 jeweils die Länge $\|w\|$; die Diagonale zwischen 0 und $v+w$ mißt die Länge $\|v+w\|$ und die Diagonale zwischen v und w die Länge $\|v-w\|$. Die Parallelogrammgleichung besagt also, daß die Quadrate über den vier Seiten des Parallelogramms zusammen dieselbe Fläche besitzen wie die Quadrate über den beiden Diagonalen.)

c) Es ergibt sich

$$\|v+w\| = \|v-w\| \iff \|v+w\|^2 = \|v-w\|^2 \iff \\ \iff 2\,\sigma(v,w) = -2\,\sigma(v,w) \iff \sigma(v,w) = 0 \iff v \perp w.$$

d) Es ergibt sich zunächst

$$\|v+w\| = \|v\| + \|w\| \iff \|v+w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2 \iff \\ \iff \|v\|^2 + 2\,\sigma(v,w) + \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2\,\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \iff \\ \iff 2\,\sigma(v,w) = 2\,\|v\| \cdot \|w\| \iff \sigma(v,w) = \|v\| \cdot \|w\|;$$

damit erhält man:

- Für „$\Longrightarrow$“ folgt aus $\sigma(v,w) = \|v\| \cdot \|w\|$

  $$\sigma(v,w) \geq 0 \qquad \text{und damit} \qquad |\sigma(v,w)| = \sigma(v,w) = \|v\| \cdot \|w\|,$$

  woraus sich mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung ergibt, daß v und w linear abhängig sind; folglich ist $w = 0$ oder $v = \lambda\, w$ mit $w \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei

  $$0 \leq \sigma(v,w) = \sigma(\lambda\, w, w) = \lambda\, \sigma(w,w) = \lambda \cdot \|w\|^2$$

  und damit $0 \leq \lambda$ gilt.
- Für „$\Longleftarrow$“ ergibt sich im Falle $w = 0$

  $$\sigma(v,w) = 0 = \|v\| \cdot \|w\|$$

  sowie im Falle $v = \lambda\, w$ mit $\lambda \geq 0$

  $$\sigma(v,w) = \sigma(\lambda\, w, w) = \lambda\, \sigma(w,w) = \lambda\, \|w\|^2 = (\lambda\, \|w\|) \cdot \|w\| \underset{\lambda \geq 0}{=} \\ = (|\lambda| \cdot \|w\|) \cdot \|w\| = \|\lambda\, w\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|w\|.$$