MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Klausur
12.10.2016

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_c(\lambda) \quad &= \quad \det(A_c - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & c & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ c & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Laplace}}{\underset{\text{2. Zeile}}{=}} \quad (-1)^{2+2} \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ c & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \quad (1-\lambda) \cdot \left((-\lambda)^2 - c\right) = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - c\right) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $c < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - c > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne (reelle) Nullstelle; damit zerfällt χ_c nicht vollständig in (reelle) Linearfaktoren, so daß A_c nicht reell diagonalisierbar ist.
- Für $c = 0$ ist $\chi_c(\lambda) = -(\lambda - 1) \cdot \lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_2 = 0$ ein Eigenwert von A_0 der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ ist; wegen

$$A_0 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $\operatorname{Rang}(A_0 - \lambda_2 E_3) = 2$, so daß $\lambda_2 = 0$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 3 - 2 = 1$ besitzt. Wegen $\alpha_2 \neq \gamma_2$ ist A_0 nicht reell diagonalisierbar.
- Für $c > 0$ ist

$$\chi_c(\lambda) = -(\lambda - 1) \cdot \left(\lambda^2 - (\sqrt{c})^2\right) = -(\lambda - 1)(\lambda + \sqrt{c})(\lambda - \sqrt{c});$$

  damit besitzt χ_c die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{sowie} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{c} < 0 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \sqrt{c} > 0.$$

Demnach besitzt die Matrix A_c für

$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \iff 1 \neq \sqrt{c} \iff c \neq 1$$

drei verschiedene reelle Eigenwerte, ist also als 3×3–Matrix reell diagonalisierbar. Für $c = 1$ besitzt die Matrix A_1 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$); wegen

$$A_1 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(A_1 - \lambda_1 E_3) = 1$, so daß $\lambda_1 = -1$ auch geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3 - 1 = 2$ besitzt. Damit ist die Matrix A_1 reell diagonalisierbar.

b) Für $c = 4$ besitzt die Matrix $A_4 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gemäß a) die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = 2$. Wegen

$$A_4 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+4\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\frac{1}{3}\mathrm{III}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, wegen

$$A_4 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+9\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{I}-4\mathrm{II}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$, und wegen

$$A_4 - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{(-1)\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{III}+2\mathrm{I}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}-7\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{I}-4\mathrm{II}}{\leadsto}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$. Mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt dann $P^{-1} A_4 P = D$.

2. a) Wir betrachten einen Untervektorraum U eines euklidischen Vektorraums (V, σ) mit endlicher Dimension $\dim(V) < \infty$.

- Eine Basis $b_1, \ldots, b_r$ von U heißt *Orthonormalbasis von U*, wenn die Vektoren $b_1, \ldots, b_r$ bezüglich des Skalarprodukts σ normiert und paarweise orthogonal sind; für alle $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$ gilt also

$$\|b_i\|_\sigma = \sqrt{\sigma(b_i, b_i)} = 1 \qquad \text{und} \qquad \sigma(b_i, b_j) = 0.$$

- Ein Untervektorraum $U^\perp$ von V heißt *orthogonales Komplement von U in V*, wenn er ein zu U komplementärer und bezüglich des Skalarprodukts σ orthogonaler Untervektorraum von V ist; es gilt also

$$U \oplus U^\perp = V \qquad \text{und} \qquad U \perp U^\perp.$$

Alternativ kann man auch

$$U^\perp = \{v \in V \mid u \perp v \text{ für alle } u \in U\}$$

definieren.

b) Es wird nun der euklidische $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\circ$ betrachtet.

- Die beiden gegebenen Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ sind gemäß

$$v_1 \circ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 0$$

orthogonal, so daß der erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ die Orthonormalbasis

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\, v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\|v_2\|}\, v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Mit der Hilfsmatrix $B = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ gilt ferner

$$U^\perp = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid B^\top x = 0\right\},$$

und wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

ist

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U in $\mathbb{R}^4$; wir unterwerfen diese dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_3 = v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_3\| = 3, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sowie

$$a_4 = v_4 - (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{18}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_4\| = 3, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|a_4\|} \cdot a_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so daß b_3, b_4 wegen $\langle b_3, b_4 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$ eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ ist. Insgesamt ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^4, \circ)$.

- Für die Spiegelung $s_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ am Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ gilt

$$s_U(b_1) = b_1 \quad \text{und} \quad s_U(b_2) = b_2 \quad \text{für} \quad b_1,\, b_2 \in U$$

sowie

$$s_U(b_3) = -b_3 \quad \text{und} \quad s_U(b_4) = -b_4 \quad \text{für} \quad b_3,\, b_4 \in U^\perp;$$

für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von s_U gilt demnach

$$A \cdot b_1 = b_1, \quad A \cdot b_2 = b_2 \quad \text{sowie} \quad A \cdot b_3 = -b_3, \quad A \cdot b_4 = -b_4,$$

und mit den beiden Hilfsmatrizen

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad Q = (b_1, b_2, -b_3, -b_4) \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} A \cdot P = A \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) &= (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3, A \cdot b_4) \\ &= (b_1, b_2, -b_3, -b_4) = Q, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} A &= Q \cdot P^{-1} \underset{P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})}{=} Q \cdot P^\top = \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

3. a) Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt

   - *orthogonal,* wenn $A \cdot A^\top = E_n = A^\top \cdot A$ gilt; es kann auch die dazu äquivalente Eigenschaft, daß die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \circ)$ bilden, zur Definition erhoben werden.
   - *orthogonal diagonalisierbar,* wenn es eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P^\top A\,P = D$ gibt; es kann auch die dazu äquivalente Eigenschaft, daß es eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \circ)$ aus Eigenvektoren von A gibt, zur Definition erhoben werden.

   b) Da $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal diagonalisierbar ist, gibt es eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$P^\top AP = D, \qquad \text{also} \qquad A = \underbrace{PP^\top}_{=E_n} A \underbrace{PP^\top}_{=E_n} = P\,\underbrace{P^\top AP}_{=D}\,P^\top = PDP^\top;$$

   wegen

$$A^\top = \left(PDP^\top\right)^\top = \underbrace{(P^\top)^\top}_{=P}\,\underbrace{D^\top}_{=D}\,P^\top = PDP^\top = A$$

   ist die Matrix A symmetrisch.

   c) Da die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, ist sie gemäß dem Satz über die Hauptachsentransformation orthogonal diagonalisierbar, es gibt also eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$P^\top AP = D, \qquad \text{wie in b) also} \qquad A = PDP^\top;$$

   dabei ist $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A. Da A nur die Eigenwerte -1 und 1 besitzt, gilt $\lambda_1^2 = \ldots = \lambda_n^2 = 1$ und damit

$$D \cdot D^\top \underset{D^\top = D}{=} D \cdot D = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) = E_n,$$

   so daß die Matrix $D \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal ist; folglich ist aber die Matrix A als Produkt der orthogonalen Matrizen P, D und $P^\top$ ebenfalls orthogonal.

4. a) Im euklidischen Raum $(\mathbb{R}^3, \circ)$ sind die Punkte

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   sowie die von a, b und c aufgespannte Ebene E zu betrachten.

   - Die Ebene E besitzt den Trägerpunkt a sowie die beiden (offensichtlich linear unabhängigen) Richtungsvektoren

$$u_1 = b - a = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = c - a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

also die Parameterdarstellung $E = a + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2$; damit ist

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor von E, und wir erhalten für E die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ x = \widetilde{u} \circ a \qquad \text{bzw.} \qquad 6\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 = -1.$$

- Wegen $\|\widetilde{u}\| = \sqrt{49} = 7$ und $\widetilde{u} \circ a = -1 < 0$ besitzt E die Hessesche Normalform
$$E \quad : \quad \frac{6\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + 1}{-7} = 0,$$
und als Abstand von d zu E ergibt sich damit
$$\operatorname{dist}(d, E) = \left| \frac{6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1}{-7} \right| = \left| \frac{49}{-7} \right| = |-7| = 7.$$

- Wegen $\operatorname{dist}(d, E)$ gemäß b) besitzt jeder Punkt der Ebene E und damit jeder Punkt einer Geraden $g \subseteq E$ von d mindestens den Abstand 7, so daß damit $\operatorname{dist}(d, g) \geq 7$ gilt; folglich kann die Ebene E keine Gerade g enthalten, von welcher der Punkt d den Abstand 5 besitzt.

b) In der euklidischen Ebene $(\mathbb{R}^2, \circ)$ sind die Punkte

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir ermitteln zunächst im ersten Schritt die notwendige Gestalt der Drehmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eines Vektors $t \in \mathbb{R}^2$, so daß die damit gegebene Drehung

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad d(x) = D \cdot x + t,$$

die geforderten Eigenschaften $d(a_1) = b_1$ und $d(a_2) = b_2$ besitzt, und überprüfen dann im zweiten Schritt, ob die gefundene Abbildung auch tatsächlich das Gewünschte leisten. Wegen

$$D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ergibt sich durch Differenzbildung die notwendige Bedingung

$$D \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

es ist D eine Drehmatrix, also gilt

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$, und wegen

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{(I)} & 4\cos\varphi & - & 3\sin\varphi & = & 5 \\ \text{(II)} & 4\sin\varphi & + & 3\cos\varphi & = & 0 \end{array}$$

ergibt sich über $4 \cdot \text{(I)} + 3 \cdot \text{(II)}$ bzw. $(-3) \cdot \text{(I)} + 4 \cdot \text{(II)}$ dann

$$25\cos\varphi = 20 \qquad \text{bzw.} \qquad 25\sin\varphi = -15,$$

also $\cos\varphi = \frac{4}{5}$ und $\sin\varphi = -\frac{3}{5}$. Somit kommt nur

$$D = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in Frage. Wir überprüfen nun, ob die in Frage kommenden affine Abbildung die gewünschten Eigenschaften besitzt: Die affine Abbildung $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $d(x) = D \cdot x + t$, mit

$$D = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

beschreibt wegen $D \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ und $\det(D) = 1$ eine Drehung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, und es gilt

$$d\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$d\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit gibt es genau eine Drehung mit den gewünschten Eigenschaften. Für das Drehzentrum z der Drehung d ergibt sich

$$z = (E_2 - D)^{-1} \cdot t = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$