MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Repetitorium
13.07.2016

Repetitorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Es ist

$$A - \lambda \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda \cdot E_3) = 1 < 3;$$

damit ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von A, und für den Eigenraum ergibt sich

$$\operatorname{Eig}(A; \lambda) = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{mit} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $x \neq 0$ mit

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

damit ist $x \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$.

c) Gemäß a) sind u_1 und u_2 linear unabhängige Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 3$, und gemäß b) ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\mu = 7$; damit sind u_1, u_2, x linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$, wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ also schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix A. Folglich ist A reell diagonalisierbar, und mit der invertierbaren Matrix

$$P = (u_1, u_2, x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ergibt sich die Beziehung $P^{-1}AP = D$.

2. Die in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

besitzt zunächst die Determinante

$$\det M_a = \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0+0+0) - (0+0-a(a+1)) = a(a+1),$$

und wir erhalten

$$M_a \text{ invertierbar} \iff \det M_a \neq 0 \iff a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}\,.$$

Ferner besitzt M_a das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned}
\chi_a(\lambda) \quad &= \quad \det(M_a - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -a & 0 \\ 1 & a+1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a+1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{3. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \quad (-1)^{3+3}(a+1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ 1 & a+1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \quad (a+1-\lambda) \cdot \big(-\lambda(a+1-\lambda) - (-a) \big) \\
&= \quad (a+1-\lambda) \cdot \big(\lambda^2 - (a+1)\lambda + a \big) \\
&\underset{\text{Vieta}}{=} \quad -(\lambda - (a+1)) \cdot (\lambda - a) \cdot (\lambda - 1)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit zerfällt $\chi_a(\lambda)$ komplett in Linearfaktoren, und für die Nullstellen

$$\lambda_1 = a+1, \qquad \lambda_2 = a, \qquad \lambda_3 = 1$$

gilt stets $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sowie

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff a = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \iff a = 1,$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ besitzt M_a die drei (paarweise) verschiedenen Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar.
- Für $a = 0$ besitzt M_0 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$; wegen

  $$M_0 - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ergibt sich die geometrische Vielfachheit

  $$\gamma_1 = 3 - \operatorname{Rang}(M_0 - 1 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$

  und wegen $\gamma_1 \neq \alpha_1$ ist M_0 nicht diagonalisierbar.

- Für $a = 1$ besitzt M_1 den Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$; wegen

$$M_1 - 1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ergibt sich die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_2 = 3 - \operatorname{Rang}(M_1 - 1 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$

  und wegen $\gamma_2 \neq \alpha_2$ ist M_1 nicht diagonalisierbar.

Zusammenfassend ergibt sich

Matrix M_a		diagonalisierbar	
		ja	nein
invertierbar	ja	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$	$a = 1$
	nein	$a = -1$	$a = 0$

3. a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2c & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_{A_c}(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2\,c & c & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -\lambda^3 + c\,\lambda = -\lambda(\lambda^2 - c)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $c < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - c$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne (reelle) Nullstellen; damit ist $\lambda_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 1$ der einzige Eigenwert von A_c.
- Für $c = 0$ ist $\chi_{A_0}(\lambda) = -\lambda^3$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A_0 den einzigen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 3$.
- Für $c > 0$ ist $\chi_{A_c}(\lambda) = -\lambda\,(\lambda - \sqrt{c})\,(\lambda + \sqrt{c})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A_c die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{c} > 0$ und $\lambda_3 = -\sqrt{c} < 0$ jeweils der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

b) Wir treffen dieselbe Fallunterscheidung wie in a) und erhalten:

- Für $c < 0$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_{A_c} nicht in (reelle) Linearfaktoren; damit ist A_c nicht (reell) diagonalisierbar.
- Für $c = 0$ ist $\operatorname{Rang}(A_0 - \lambda_1 E) = \operatorname{Rang}(A_0) = 1$, und damit ist $\lambda_1 = 0$ von der geometrischen Vielfachheit $\gamma_1 = 2$; wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist A_0 nicht diagonalisierbar.
- Für $c > 0$ besitzt A_c drei verschiedene Eigenwerte und ist daher als 3×3–Matrix diagonalisierbar.

c) Für $c = 4$ besitzt die Matrix A_4 gemäß a) die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -2$. Wegen

$$A_4 - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II} \leftrightarrow \frac{1}{4}\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$, wegen

$$A_4 - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\overset{-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$, wegen

$$A_4 - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\overset{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A_4 zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$. Mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich damit $P^{-1}A_4P = D$.

4. a) Der gegebene Endomorphismus

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \varphi(A) = A + A^\top,$$

des Vektorraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller 2×2–Matrizen besitzt bezüglich der Basis

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wegen

$$\varphi(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$\varphi(B_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 2 \cdot B_4$$

die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ von φ ist gemäß $M^\top = M$ symmetrisch und damit insbesondere diagonalisierbar; folglich ist auch der Endomorphismus φ diagonalisierbar. Genauer gilt: wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_4) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Zeile}}{=} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^2 \cdot \left[(1-\lambda)^2 - 1^2\right] = (2-\lambda)^2 \cdot \left[(2-\lambda)\cdot(-\lambda)\right] = -\lambda \cdot (2-\lambda)^3$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M den dreifachen Eigenwert $\lambda_1 = 3$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 0$; wegen

$$M - \lambda_1 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}(M, \lambda_1)$, und wegen

$$M - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(M, \lambda_2)$. Folglich sind u_1, u_2, u_3, u_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von M, so daß

$$\begin{aligned}
1 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 + 1 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
0 \cdot B_1 + (-1) \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aus Eigenvektoren von φ ist.

5. a) Für die gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Hilfsmatrix $A = (v_1, v_2, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind v_1, v_2 linear unabhängig mit

$$w_1 = 2 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 = 1 \cdot v_1 + 4 \cdot v_2,$$

insbesondere also eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, w_1, w_2 \rangle$.

b) Da v_1, v_2 eine Basis von V sind, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung für jeden Vektorraum V' und jede Wahl von v_1', $v_2' \in V'$ genau eine lineare Abbildung $f : V \to V'$ mit $f(v_1) = v_1'$ und $f(v_2) = v_2'$; insbesondere existiert genau ein Endomorphismus $f : V \to V$ von V mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$. Wegen

$$\begin{array}{lllllll} f(v_1) & = & w_1 & = & 2 \cdot v_1 & + & 3 \cdot v_2 \\ f(v_2) & = & w_2 & = & 1 \cdot v_1 & + & 4 \cdot v_2 \end{array} \qquad \text{ist} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis v_1, v_2 von V.

c) Wegen

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= \\
&= (2-\lambda)\,(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\,\lambda + 5 = (\lambda - 1)\,(\lambda - 5)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 5$ und ist damit als 2×2–Matrix insbesondere diagonalisierbar; wegen

$$M - \lambda_1 E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$M - \lambda_2 E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 5$. Folglich ist auch der Endomorphismus f von V diagonalisierbar, und

$$b_1 = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_2 = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis von V aus Eigenvektoren von f.

6. a) Die gegebene Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß $A^\top = A$ symmetrisch, mithin orthogonal diagonalisierbar. Wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3-2 & -2 & -1 \\ -2 & 6-2 & 2 \\ -1 & 2 & 3-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\mathrm{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 1 < 3$; damit ist $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert von A der (algebraischen wie geometrischen) Vielfachheit $3 - \mathrm{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 2$, und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

bilden eine Basis von $\mathrm{Eig}(A; \lambda_1 = 1)$. Damit besitzt A einen weiteren Eigenwert λ_2 der (algebraischen wie geometrischen) Vielfachheit 1 mit

$$\mathrm{Eig}(A; \lambda_2) = \mathrm{Eig}(A; \lambda_1)^\perp;$$

folglich ist der Vektor

$$v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

eine Basis von $\mathrm{Eig}(A;\lambda_2)$, und wegen

$$A \cdot v_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot v_3$$

ergibt sich $\lambda_2 = 4$.

b) Wegen $\mathrm{Eig}(A;\lambda_1) = \mathrm{Eig}(A;\lambda_2)^\perp$ ist

$$v_1' = v_2 \times v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ein (auf v_2 senkrecht stehender) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1, und folglich bilden

$$b_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ aus Eigenvektoren von A. Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

erhält man somit, daß $P^\top A\, P = D$ Diagonalgestalt besitzt.

c) Für die Matrix

$$F = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gilt $F^2 = D$, so daß sich für die Matrix $B = PFP^\top \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ damit

$$B^2 = (PFP^\top)^2 = PF^2P^\top = PDP^\top = P(P^\top A\, P)P^\top = A$$

ergibt; dabei ist

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}^\top \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 \\ \sqrt{2} & 0 & -4 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7. a) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$, mit dem Determinantenmultiplikationssatz also

$$1 = \det(E_n) = \det(A^\top A) = \det(A^\top)\,\det(A),$$

woraus wegen $\det(A^\top) = \det(A)$ schon

$$1 = \det(A^\top)\,\det(A) = (\det(A))^2$$

und damit $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ folgt.

b) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$; ist nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt

$$A\,x = \lambda\,x \qquad \text{für ein} \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n,$$

woraus

$$\begin{aligned} x^\top x = x^\top E_n\,x = x^\top \left(A^\top A\right) x = \left(x^\top A^\top\right)(A\,x) = \\ = (A\,x)^\top (A\,x) = (\lambda\,x)^\top (\lambda\,x) = \lambda^2 \left(x^\top x\right), \end{aligned}$$

wegen $x^\top x > 0$ also $1 = \lambda^2$ und damit $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ folgt.

c) Die Aussage ist falsch: die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ist wegen

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

orthogonal, besitzt aber wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - (-1)\cdot 1 = \lambda^2 + 1 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ keinen (reellen) Eigenwert.

d) Die Aussage ist (sogar für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) wahr: ist nämlich $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonal, so gilt nach Definition $A^\top A = E_n$; damit ist A invertierbar mit $A^{-1} = A^\top$.

e) Die Aussage ist falsch: die Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ von c) ist orthogonal, wegen

$$A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

aber nicht symmetrisch.

8. a) Zu betrachten ist die durch $\sigma(x,y) = x^\top \cdot A \cdot y$ für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

definierte Bilinearform des $\mathbb{R}^3$; zunächst ist wegen $A^\top = A$ die Matrix A und damit auch die Bilinearform σ symmetrisch. Da die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = \det(1) = 1 > 0,$$

$$\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0,$$

$$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (6+0+0) - (0+0+3) = 3 > 0$$

positiv sind, ist nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz die symmetrische Matrix A und damit auch die Bilinearform σ positiv definit; folglich ist σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Mit der Bezeichnung $A = (a_{ij})_{i,j}$ gilt dabei

$$(*) \qquad \sigma(e_i, e_j) = e_i^\top \cdot A \cdot e_j = a_{ij}$$

für alle $i, j \in \{1,2,3\}$; dies geht in den folgenden Rechnungen mehrfach ein.

b) Wegen

$$\|e_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(e_1,e_1)} \underset{(*)}{=} \sqrt{1} = 1$$

und

$$\|e_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(e_2,e_2)} \underset{(*)}{=} \sqrt{2}$$

ergibt sich

$$\cos\left(\sphericalangle_\sigma(e_1,e_2)\right) = \frac{\sigma(e_1,e_2)}{\|e_1\|_\sigma \cdot \|e_2\|_\sigma} \underset{(*)}{=} \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und damit $\sphericalangle_\sigma(e_1,e_2) = \frac{\pi}{4}$ bzw. $\sphericalangle_\sigma(e_1,e_2) = 45°$.

c) Wir wenden auf die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des Skalarprodukts σ von a) an und erhalten im ersten Schritt

$$a_1 = e_1 \qquad \text{mit} \qquad \|a_1\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_1,a_1)} \underset{(*)}{=} \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_\sigma} \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

im zweiten Schritt

$$a_2 = e_2 - \sigma(e_2, b_1) \cdot b_1 \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma(a_2, a_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

also $\|a_2\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = 1$, und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|_\sigma} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie im dritten Schritt

$$\begin{aligned} a_3 = e_3 - \sigma(e_3, b_1) \cdot b_1 - \sigma(e_3, b_2) \cdot b_2 \underset{(*)}{=} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\|_\sigma = \sqrt{\sigma(a_3, a_3)} \underset{(*)}{=} \sqrt{3}$$

und damit

$$b_3 = \frac{1}{\|a_3\|_\sigma} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ mit $\langle b_1 \rangle = \langle e_1 \rangle$ und $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle$.

9. a) Zu betrachten ist der von den beiden gegebenen Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

aufgespannte Unterraum $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ im $\mathbb{R}^4$; dazu sei $B = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$. Das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U im euklidischen $\mathbb{R}^4$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$) stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B^\top \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix $B^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ überein. Dementsprechend bilden wegen

$$B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\mathrm{I} \leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

die beiden Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des orthogonalen Komplements $U^\perp$ von U im $\mathbb{R}^4$.

b) Für das Erzeugendensystem u_1, u_2 von U mit $\|u_1\| = 6$ und $\|u_2\| = 6$ gilt

$$u_1 \circ u_2 = 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$$

also $u_1 \perp u_2$; folglich bilden die normierten Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot u_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von U. Ferner unterwerfen wir die Basis w_2, w_1 von $U^\perp$ dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren und erhalten

$$a_1 = w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = 3, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = w_1 - (w_1 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{18}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = 3, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

damit ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

c) Eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch, wenn sie orthogonal diagonalisierbar ist, es also eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^n, \circ)$ aus Eigenvektoren von A gibt; es ist hier $n = 4$.

In a) wird $U^\perp$ als orthogonales Komplement von U in $\mathbb{R}^4$ konstruiert, und in b) werden v_1, v_2 bzw. b_1, b_2 als Orthonormalbasis von U bzw. $U^\perp$ berechnet; damit ist v_1, v_2, b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^4, \circ)$, die nun aus Eigenvektoren von A zum Eigenwert -1 bzw. 2 bestehen soll.

Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (v_1, v_2, b_1, b_2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(-1,-1,2,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ergibt sich $P^\top A P = D$, also

$$\begin{aligned} A = PDP^\top \quad &= \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P^\top \\ &= \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & 12 & -6 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 3 & -12 \\ 0 & -6 & -12 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10. a) Die Matrix

$$S_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist wegen $S_1^\top S_1 = E_3$ orthogonal und wegen $S_1^\top = S_1$ symmetrisch. Damit beschreibt die Abbildung $s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $s_1(x) = S_1 \cdot x$, die Spiegelung am Eigenraum $\operatorname{Eig}(S_1; 1)$ von S_1 zum Eigenwert 1; wegen

$$S_1 - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist also s_1 die Spiegelung an der Ebene $E_1 : -x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 = 0$.

b) Die gegebene Ebene

$$E_2 = \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{mit} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt das orthogonale Komplement

$$E_2^\perp = \mathbb{R} \cdot \widetilde{v} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{v} = u_1 \times u_2 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und folglich die Darstellung

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in E_2} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in E_2^\perp} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \lambda \cdot \widetilde{v} \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \widetilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 + \lambda \\ x_3 - \lambda \end{pmatrix} \in E_2$$

zunächst

$$(x_1 - \lambda) - (x_2 + \lambda) + (x_3 - \lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad \lambda = \frac{1}{3} \left(x_1 - x_2 + x_3 \right),$$

folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_{E_2}(x) &= u - \widetilde{u} = (x - \lambda \cdot \widetilde{v}) - \lambda \cdot \widetilde{v} = x - 2\lambda \cdot \widetilde{v} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{3}(x_1 - x_2 + x_3) \cdot 1 \\ x_2 - \frac{2}{3}(x_1 - x_2 + x_3) \cdot (-1) \\ x_3 - \frac{2}{3}(x_1 - x_2 + x_3) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{2}{3} x_3 \\ \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 \\ -\frac{2}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 + \frac{1}{3} x_3 \end{pmatrix} \\ &= S_2 \cdot x \qquad \text{mit} \qquad S_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

c) Für die Komposition $d = s_2 \circ s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $d(x) = S \cdot x$, gilt

$$\begin{aligned} S = S_2 \cdot S_1 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -4 & -8 & 19 \\ 16 & 11 & 8 \\ -13 & 16 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}; \end{aligned}$$

wegen $S^\top S = E_3$ ist S orthogonal, so daß d wegen

$$\begin{aligned} \det(S) &= \frac{1}{21^3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -8 & 19 \\ 16 & 11 & 8 \\ -13 & 16 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}+2\text{I}}{\overset{\text{II}+4\text{I}}{=}} \frac{1}{21^3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -8 & 19 \\ 0 & -21 & 84 \\ -21 & 0 & 42 \end{vmatrix} \underset{21 \text{ aus III}}{\overset{21 \text{ aus II}}{=}} \\ &= \frac{21^2}{21^3} \cdot \begin{vmatrix} -4 & -8 & 19 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{21} \cdot \Big((8 + 32 + 0) - (19 + 0 + 0) \Big) = 1 \end{aligned}$$

eine Drehung beschreibt. Wegen

$$\begin{aligned}
S - 1\cdot E_3 \quad &= \quad \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -4-21 & -8 & 19 \\ 16 & 11-21 & 8 \\ -13 & 16 & 4-21 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -25 & -8 & 19 \\ 16 & -10 & 8 \\ -13 & 16 & -17 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{III+II}}{\overset{\text{I+II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -9 & -18 & 27 \\ 16 & -10 & 8 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{2}\text{II},\frac{1}{3}\text{III}}{\overset{-\frac{1}{9}\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 8 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \\
&\underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-8\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -21 & 28 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{21}\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist $\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ die Drehachse von d, und für den Drehwinkel $\sigma \in [0,\pi]$ gilt

$$2\,\cos\sigma + 1 = \mathrm{Spur}(S) = \frac{(-4)+11+4}{21} = \frac{11}{21}, \quad \text{also} \quad \cos\sigma = -\frac{5}{21}.$$

11. a) Wir betrachten eine Drehung im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3,\circ)$ mit der Drehachse $\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dem Drehwinkel φ mit $\cos\varphi = \frac{3}{5}$. Wir ergänzen den normierten Richtungsvektor

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{durch} \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3,\circ)$. Bei der zu betrachtenden Drehung bleibt b_1 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehung um den Winkel φ mit $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ (und damit $\sin\varphi = \pm\frac{4}{5}$) in der von b_2 und b_3 aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix M dieser Drehung bezüglich b_1, b_2, b_3 ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad D_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad D_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

also

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{bzw.} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$$

gilt für die Abbildungsmatrix A dieser Drehung dann $M = P^\top AP$, also

$$\begin{aligned} A = PMP^\top &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 5 & -3 & 4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -4\sqrt{2} \\ 2 & 8 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -4\sqrt{2} \\ 2 & 8 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix}^\top = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4\sqrt{2} \\ 2 & 8 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

b) Orthogonale Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $f(v) = v$ sind neben der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ auch die beiden Drehungen mit dem Drehwinkel $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ und der Drehachse $\mathbb{R}\cdot v$; wir haben zu zeigen, daß es keine weiteren Abbildungen mit dieser Eigenschaft gibt.

Wir betrachten dazu eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A\cdot x$, mit $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $f(v) = v$; damit ist zunächst die Abbildungsmatrix $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ orthogonal. Die Komposition $f \circ f \circ f$ hat die Abbildungsmatrix A^3, und die Einheitsmatrix E_3 ist die Abbildungsmatrix der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$; damit gilt $A^3 = E_3$, und es ergibt sich

$$1 = \det(E_3) = \det(A^3) = (\det(A))^3, \qquad \text{also} \qquad \det(A) = 1.$$

Wegen $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ und $\det(A) = 1$ beschreibt f eine Drehung in $(\mathbb{R}^3, \circ)$, wobei wegen $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ als Drehwinkel nur $\varphi = 0$ mit $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ sowie $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$ in Frage kommen; wegen $f(v) = v$ ist $\mathbb{R}\cdot v$ die Drehachse von f.

12. a) Die in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene affine Teilmenge

$$E_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha-1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$$

besitzt den Trägerpunkt

$$t_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie den von den beiden Vektoren

$$v_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_\alpha = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha-1 \\ -\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannten Richtungsraum $U_\alpha = \langle v_\alpha, w_\alpha \rangle$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}_\alpha &= v_\alpha \times w_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha-1 \\ -\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+\alpha & \alpha-1 \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & -\alpha \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1+\alpha & \alpha-1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-\alpha-\alpha^2)-(\alpha^2-\alpha) \\ -\big(-\alpha^2-(\alpha-\alpha^2)\big) \\ (\alpha^2-\alpha)-(1-\alpha^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,\alpha^2 \\ \alpha \\ 2\,\alpha^2-\alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,
\end{aligned}$$

und wegen $\widetilde{u}_\alpha \neq 0$ sind die beiden Richtungsvektoren v_α und w_α linear unabhängig, also eine Basis von U_α; folglich ist $\dim(U_\alpha) = 2$, folglich also E_α eine Ebene.

b) Die gegebene Ebene

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3$$

besitzt den Trägerpunkt

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie die beiden (offensichtlich linear unabhängigen) Richtungsvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

damit besitzt E den Normalenvektor

$$\widetilde{u} = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und damit die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ x = \widetilde{u} \circ t \quad \text{bzw.} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 1.$$

Ferner besitzt gemäß a) für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Ebene E_α den Normalenvektor $\widetilde{u}_\alpha$ sowie den Trägerpunkt t_α und damit die Gleichung

$$\widetilde{u}_\alpha \circ x = \widetilde{u}_\alpha \circ t_\alpha \quad \text{bzw.} \quad -2\,\alpha^2\,x_1 + \alpha\,x_2 + (2\,\alpha^2 - \alpha - 1)\,x_3 = -\alpha^2.$$

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ liegt nun genau dann im Schnitt $E \cap E_\alpha$ der beiden Ebenen E und E_α, wenn er beiden Gleichungen genügt, also Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & (-1)\,x_3 & = & 1 \\ -2\,\alpha^2\,x_1 & + & \alpha\,x_2 & + & (2\,\alpha^2-\alpha-1)\,x_3 & = & -\alpha^2 \end{array}$$

ist. Mit der erweiterten Koeffizientenmatrix ergibt sich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2\,\alpha^2 & \alpha & 2\,\alpha^2-\alpha-1 & -\alpha^2 \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}+2\,\alpha^2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2\,\alpha^2+\alpha & -\alpha-1 & \alpha^2 \end{array}\right);$$

wegen

$$2\,\alpha^2+\alpha=0 \iff 2\,\alpha\left(\alpha+\tfrac{1}{2}\right)=0 \iff \alpha\in\left\{0,-\tfrac{1}{2}\right\}$$

und

$$-\alpha-1=0 \iff \alpha=-1$$

besitzt die Koeffizientenmatrix wie die erweiterte Koeffizientenmatrix jeweils Rang 2, so daß das Gleichungssystem stets lösbar ist. Folglich schneiden sich die beiden Ebenen E und E_α für jedes $\alpha\in\mathbb{R}$.

13. a) Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Punkte

$$a=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}1+\alpha\\1-\alpha\\\alpha\end{pmatrix};$$

dabei ist $\alpha\in\mathbb{R}$ ein Parameter.

- Mit dem Trägerpunkt $t=a=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ und den linear unabhängigen Richtungsvektoren $u_1=b-a=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $u_2=c-a=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ ergibt sich zunächst für die Ebene E durch a, b und c die Parameterdarstellung

$$E=t+\mathbb{R}\cdot u_1+\mathbb{R}\cdot u_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

  Mit dem Normalenvektor

$$\widetilde{u}_E=u_1\times u_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

  ergibt sich für E die Gleichung

$$\widetilde{u}_E\circ x=\widetilde{u}_E\circ t,\quad\text{also}\quad -2\,x_1-2\,x_2+x_3=-5.$$

- Wegen $\|\widetilde{u}_E\|=3$ und $\widetilde{u}_E\circ t<0$ ergibt sich die Hessesche Normalform

$$\frac{-2\,x_1-2\,x_2+x_3+5}{-3}=0\qquad\text{bzw.}\qquad\frac{2\,x_1+2\,x_2-x_3-5}{3}=0.$$

  Damit ist der Abstand des Punktes d zur Ebene E

$$d(d,E)=\left|\frac{2\,(1+\alpha)+2\,(1-\alpha)-\alpha-5}{3}\right|=\left|\frac{-\alpha-1}{3}\right|.$$

Die Ebene E zerlegt den $\mathbb{R}^3$ in zwei offene Halbräume, nämlich

$$E_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \widetilde{u}_0 \circ (x - t) < 0 \right\}$$

und

$$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \widetilde{u}_0 \circ (x - t) > 0 \right\},$$

wobei $\widetilde{u}_0$ der normierte Normalenvektor der Ebene ist. Wegen

$$\widetilde{u}_0 \circ (0 - t) = -\frac{5}{3} < 0 \quad \text{ist} \quad 0 \in E_0;$$

damit d und der Ursprung auf derselben Seite von E liegen, muß

$$\frac{-\alpha - 1}{3} < 0 \iff -\alpha - 1 < 0 \iff -1 < \alpha$$

gelten.

- Es ist $g = t_g + \mathbb{R}\, u_g$ und $h = t_h + \mathbb{R}\, u_h$ mit

$$t_g = a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_g = b - a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$t_h = c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_h = d - c = \begin{pmatrix} -1 + \alpha \\ -\alpha \\ -1 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Die beiden Verbindungsgeraden g und h sind genau dann senkrecht zueinander, wenn die Richtungsvektoren u_g und u_h senkrecht zueinander sind, also wenn

$$u_g \perp u_h \iff u_g \circ u_h = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 + \alpha \\ -\alpha \\ -1 + \alpha \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (-1 + \alpha) - (-\alpha) = 0 \iff 2\,\alpha = 1 \iff \alpha = \frac{1}{2}.$$

gilt.

b) Gemäß a) gilt mit $\alpha = 0$ für den Abstand des Punktes d von der Ebene E die Beziehung $d(d, E) > 0$, weswegen a, b, c, d ein affines Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden. Nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung gibt es genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x + t$, mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^3$, für die

$$f(a) = 0 \quad f(b) = e_1, \quad f(c) = e_2 \quad \text{und} \quad f(d) = e_3$$

gilt. Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Vektor $t \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} A \cdot a + t &= f(a) = 0 \\ A \cdot b + t &= f(b) = e_1 \\ A \cdot c + t &= f(c) = e_2 \\ A \cdot d + t &= f(d) = e_3 \end{aligned}$$

sowie durch Differenzbildung dann

$$\begin{aligned}
A\cdot(b-a) &= e_1 - 0 = e_1, &\quad \text{also} &\quad A\cdot u_1 = e_1,\\
A\cdot(c-a) &= e_2 - 0 = e_2, &\quad \text{also} &\quad A\cdot u_2 = e_2,\\
A\cdot(d-a) &= e_3 - 0 = e_3, &\quad \text{also} &\quad A\cdot u_3 = e_3,
\end{aligned}$$

mit $u_1 = b-a$, $u_2 = c-a$ und $u_3 = d-a$. Mit $B = (u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $E_3 = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ erhält man also

$$A\cdot B = A\cdot(u_1,u_2,u_3) = (A\cdot u_1, A\cdot u_2, A\cdot u_3) = (e_1,e_2,e_3) = E_3;$$

wegen

$$(B \mid E_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \underset{\mathrm{II+I}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I-II}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1\end{array}\right) = \left(E_3 \mid B^{-1}\right)$$

ergibt sich

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

sowie

$$t = 0 - A\cdot a = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wegen $A = B^{-1} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ist A invertierbar, folglich ist f eine Affinität.

14. a) Es ist $g_1 = t_1 + \mathbb{R}\,u_1$ und $g_2 = t_2 + \mathbb{R}\,u_2$ mit

$$t_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ und } u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad t_2 = \begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix} \text{ und } u_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Da die Richtungsvektoren u_1, u_2 linear unabhängig sind, können die Geraden g_1 und g_2 nicht parallel sein, und die gemeinsame Lotgerade ℓ der Geraden g_1 und g_2 besitzt den Richtungsvektor

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix};$$

seien x_1 und x_2 die Lotfußpunkte auf g_1 und g_2. Dabei besitzt x_1 (als Punkt von g_1) die Gestalt

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\tau \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = x_1 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_2 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in g_2}$$

mit geeigneten Parametern λ, $\mu \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-5\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}+2\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man $\mu = 0$ sowie $\lambda = 1$ und $\tau = 1$, so daß sich die Lotfußpunkte

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ergeben. Für den Abstand der beiden Geraden gilt damit

$$d(g_1, g_2) = d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{14}.$$

b) Wir konstruieren zwei nicht parallele Geraden g durch $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h durch $y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, die auf der Verbindungsgeraden ℓ der Punkte x_0 und y_0 senkrecht stehen; diese besitzt die Parameterdarstellung

$$\ell = x_0 + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} \qquad \text{mit} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{u} = y_0 - x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren

$$u_g = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_h = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

sind offensichtlich linear unabhängig sowie wegen $u_g \circ \widetilde{u} = 0$ und $u_h \circ \widetilde{u} = 0$ zu $\widetilde{u}$ orthogonal, so daß die beiden Geraden

$$g = x_0 + \mathbb{R} \cdot u_g = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

und

$$h = y_0 + \mathbb{R} \cdot u_h = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

nicht parallel sind und die gemeinsame Lotgerade ℓ mit den Lotfußpunkten x_0 und y_0 besitzen; damit gilt

$$d(g, h) = d(x_0, y_0) > 0,$$

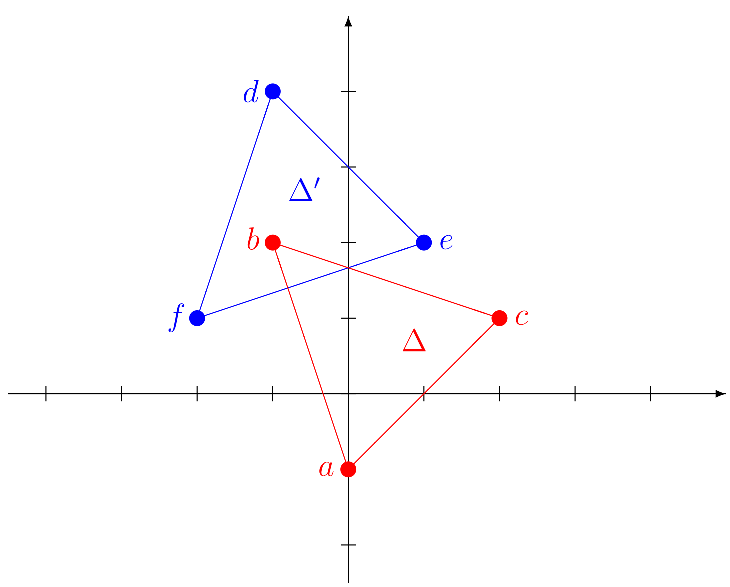
so daß g und h keinen gemeinsamen Punkt besitzen können. Für den Abstand zwischen g und h ergibt sich

$$d(g, h) = d(x_0, y_0) = \|y_0 - x_0\| = \left\| \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

15. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sind die Punkte

$$a = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

gegeben; zu betrachten sind die Bewegungen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche die Punktmenge $\{a, b, c\}$ auf die Punktmenge $\{d, e, f\}$ abbilden:



a) Für die Seitenlängen des Dreiecks Δ ergibt sich

$$\operatorname{dist}(a,b) = \|a-b\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10},$$

$$\operatorname{dist}(a,c) = \|a-c\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{dist}(b,c) = \|b-c\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10};$$

ferner ergibt sich für die Seitenlängen des Dreiecks Δ'

$$\operatorname{dist}(d,e) = \|d-e\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{dist}(d,f) = \|d-f\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10},$$

$$\operatorname{dist}(e,f) = \|e-f\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}.$$

Damit gilt für eine Bewegung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die das Dreieck Δ mit den Eckpunkten a, b, c auf das Dreieck Δ' mit den Eckpunkten d, e, f abbildet, aufgrund ihrer Abstandstreue notwendigerweise entweder

$$(1) \qquad g(a) = e, \quad g(b) = f, \quad g(c) = d$$

oder

$$(2) \qquad g(a) = d, \quad g(b) = f, \quad g(c) = e.$$

Wir weisen nun nach, daß beiden Möglichkeiten (1) und (2) realisiert werden. Da die beiden Richtungsvektoren

$$u_1 = b - a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = c - a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden die Punkte a, b, c ein affines Koordinatensystem; damit existiert aber nach dem Prinzip der affinen Fortsetzung für jede Vorgabe von Punkten $a', b', c' \in \mathbb{R}^2$ genau eine affine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = M \cdot x + t$, mit

$$g(a) = a', \quad g(b) = b' \quad \text{und} \quad g(c) = c'.$$

Für ihre Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und ihren Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ gilt damit

$$M \cdot a + t = a', \qquad M \cdot b + t = b' \quad \text{und} \quad M \cdot c + t = c';$$

zieht man die erste Gleichung von den beiden anderen ab, so erhält man

$$M \cdot \underbrace{(b-a)}_{=u_1} = b' - a' \qquad \text{und} \qquad M \cdot \underbrace{(c-a)}_{=u_2} = c' - a'.$$

Mit den Hilfsmatrizen $B = (u_1, u_2) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ und $C = (b'-a', c'-a') \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt sich damit zunächst

$$M \cdot B = M \cdot (u_1, u_2) = (M \cdot u_1, M \cdot u_2) = (b' - a',\, c' - a') = C,$$

also

$$M = C \cdot B^{-1} \qquad \text{mit} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},$$

und dann etwa über die erste Gleichung $t = a' - M \cdot a$; damit ergibt sich:

- Bei (1) ist $a' = e$, $b' = f$ und $c' = d$, also $C = (f - e,\, d - e) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, damit zum einen

  $$M = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  und zum anderen

  $$t = e - M \cdot a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

  Wegen $M^\top M = E_2$ gilt $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, so daß g eine Bewegung ist.
- Bei (2) ist $a' = d$, $b' = f$ und $c' = e$, also $C = (f - d,\, e - d) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, damit zum einen

  $$M = C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  und zum anderen

  $$t = d - M \cdot a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

  Wegen $M^\top M = E_2$ gilt $M \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, so daß g eine Bewegung ist.

b) Bei der in a) ermittelten Möglichkeit (1) gilt

$$M = D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

damit ist g eine Drehung mit dem Drehwinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für das Drehzentrum $z \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$z = (E_2 - M)^{-1} \cdot t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bei der in a) ermittelten Möglichkeit (2) gilt

$$M = S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \varphi = 0;$$

damit ist g eine Gleitspiegelung mit der Spiegelachse $s + \mathbb{R} \cdot u$ und dem Verschiebungsvektor $\alpha \cdot u$. Da u ein Eigenvektor von M zum Eigenwert 1 ist, können wir etwa $u = e_1$ mit $u^\perp = e_2$ wählen, und über die Zerlegung

$$t = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot u + 3 \cdot u^\perp$$

ergibt sich zum einen $\alpha = -1$ sowie zum anderen $s = \frac{3}{2} \cdot u^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

16. a) Zu betrachten ist die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = A \cdot x + b,$$

mit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und dem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x \in \mathrm{Fix}(f) \iff f(x) = x \iff A \cdot x + b = x \iff$$
$$\iff A \cdot x - x = -b \underset{x = E_n \cdot x}{\iff} (A - E_n) \cdot x = -b;$$

damit stimmt die Menge $\mathrm{Fix}(f)$ der Fixpunkte von f mit der Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems

$$(A - E_n) \cdot x = -b \tag{$*$}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A - E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und der rechten Seite $-b \in \mathbb{R}^n$ überein; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Im Falle
$$\mathrm{Rang}\,(A - E_n) < \mathrm{Rang}\,(A - E_n \mid -b)$$
ist das lineare Gleichungssystem $(*)$ unlösbar; folglich ist L und damit $\mathrm{Fix}(f)$ leer.
- Im Falle
$$r = \mathrm{Rang}\,(A - E_n) = \mathrm{Rang}\,(A - E_n \mid -b)$$
ist das lineare Gleichungssystem $(*)$ lösbar, und mit einer partikulären Lösung x_p von $(*)$ ist dann
$$L = x_p + L_0,$$
wobei L_0 den $(n-r)$–dimensionalen linearen Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems
$$(A - E_n) \cdot x = 0$$
bezeichnet; folglich ist L und damit $\mathrm{Fix}(f)$ eine affine Teilmenge (ein affiner Unterraum) von $\mathbb{R}^n$.

b) Es ist $\lambda = 1$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn

$$\chi_A(1) = \det\,(A - 1 \cdot E_n) = 0$$

ist; so ist $\lambda = 1$ genau dann kein Eigenwert von A, wenn $\det\,(A - E_n) \neq 0$ ist, die Matrix $A - E_n$ also invertierbar ist. Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$x \in \mathrm{Fix}(f) \underset{\text{a)}}{\iff} (A - E_n) \cdot x = -b \iff x = -\,(A - E_n)^{-1} \cdot b,$$

so daß in diesem Fall f genau den einen Fixpunkt $-\,(A - E_n)^{-1} \cdot b$ besitzt.