MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Klausur
09.08.2016

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert man:

   - $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Eigenvektor* von A zu λ, wenn $x \neq 0$ und $A \cdot x = \lambda \cdot x$ gilt; der *Eigenraum* von A zu λ ist $\operatorname{Eig}(A;\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = \lambda \cdot x\}$.
   - Die *algebraische Vielfachheit* von λ gibt die Vielfachheit von λ als Nullstelle im charakteristischen Polynom χ_A von A wieder; die *geometrische Vielfachheit* von λ gibt die Dimension des Eigenraums $\operatorname{Eig}(A;\lambda)$ von A zu λ an.

   Der „Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen“ besagt:

   - Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann (reell) diagonalisierbar, wenn zum einen das charakteristische Polynom χ_A von A komplett in (reelle) Linearfaktoren zerfällt und zum anderen für jeden Eigenwert λ von A die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

   b) Die in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   besitzt das charakteristische Polynom

$$\chi_c(\lambda) = \det(A_c - \lambda \cdot E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ c & -\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ c & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \left((-\lambda)^2 - 1 \cdot c\right) = (1-\lambda) \cdot \left(\lambda^2 - c\right)$$

   für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

   - Für $c < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - c > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne reelle Nullstelle; damit zerfällt χ_c nicht vollständig in Linearfaktoren, so daß A_t nicht diagonalisierbar ist.
   - Für $c = 0$ ist $\chi_t(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\lambda_2 = 0$ ein Eigenwert von A_0 der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 2$ ist; wegen

$$A_0 - \lambda_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\overset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(A_0 - \lambda_2 \cdot E_3) = 2$, so daß $\lambda_2 = 0$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_2 = 3 - 2 = 1$ besitzt. Wegen $\alpha_2 \neq \gamma_2$ ist A_0 nicht diagonalisierbar.

- Für $c > 0$ ist

$$\chi_c(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \left(\lambda^2 - (\sqrt{c})^2\right) = (1-\lambda)\left(\lambda + \sqrt{c}\right)\left(\lambda - \sqrt{c}\right);$$

damit besitzt χ_c die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{sowie} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{c} < 0 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \sqrt{c} > 0.$$

Demnach besitzt die Matrix A_c für

$$\lambda_1 \neq \lambda_3 \iff 1 \neq \sqrt{c} \iff 1 \neq c$$

drei verschiedene Eigenwerte und ist demnach als 3×3–Matrix diagonalisierbar. Für $c = 1$ besitzt die Matrix A_1 den Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 2$ sowie den Eigenwert $\lambda_2 = -1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch der geometrischen Vielfachheit $\gamma_2 = 1$); wegen

$$A_1 - \lambda_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\operatorname{Rang}(A_1 - \lambda_1 \cdot E_3) = 1$, so daß $\lambda_1 = 1$ auch geometrische Vielfachheit $\gamma_1 = 3 - 1 = 2$ besitzt. Damit ist die Matrix A_1 diagonalisierbar.

2. a) Eine Bilinearform $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraums V heißt
   - *symmetrisch,* wenn $\sigma(v, w) = \sigma(w, v)$ für alle v, $w \in V$ gilt;
   - *positiv definit,* wenn $\sigma(v, v) > 0$ für alle $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ gilt.

In Abhängigkeit von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & s & t \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

mit der zugehörigen Bilinearform

$$\sigma_{s,t} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_{s,t}(x, y) = x^\top A_{s,t}\, y,$$

zu betrachten; dabei gilt zunächst

$$\sigma_{s,t} \text{ symmetrisch} \iff A_{s,t} \text{ symmetrisch} \iff t = 1.$$

Ferner besitzt die symmetrische Matrix $A_{s,1} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die drei Hauptminoren

$$\det(1) = 1 > 0 \qquad \text{sowie} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & s \end{pmatrix} = s - 1$$

und

$$\det(A_{s,1}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & s & 1 \\ 1 & 1 & s \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \big(s^2 - 1 - 1\big) - \big(s + 1 + s\big) = s^2 - 2\,s - 3,$$

ist also nach dem Kriterium von Hurwitz genau dann positiv definit, wenn

$$s - 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad s^2 - 2\,s - 3 > 0$$

gilt; dies ist wegen

$$s - 1 > 0 \iff s > 1$$

und damit

$$0 < s^2 - 2\,s - 3 = (s-3)(s+1) \underset{s>1}{\iff} s - 3 > 0 \iff s > 3$$

genau für $s > 3$ der Fall. Folglich ist die Bilinearform $\sigma_{s,t}$ genau dann symmetrisch und positiv definit, wenn $t = 1$ und $s > 3$ gilt.

b) Der im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^4, \circ)$ gegebene Untervektorraum

$$U = \big\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2\,x_3 - 6\,x_4 = 0\big\}$$

besitzt (als Lösungsraum einer homogenen linearen Gleichung mit den freien Variablen x_2, x_3 und x_4) die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die wir nun dem Gram–Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren unterwerfen: damit erhalten wir zunächst

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} a_3 &= v_3 - (v_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{7}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U.

3. a) Die gegebene Matrix

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß

$$S^\top \cdot S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und gemäß $S^\top = S$ auch symmetrisch; damit beschreibt der Endomorphismus

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad s(x) = S \cdot x,$$

die Spiegelung am Eigenraum $\mathrm{Eig}(S;1)$ von S zum Eigenwert $\lambda = 1$; wegen

$$\begin{aligned} S - 1 \cdot E_3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2-3 & 2 & 1 \\ 2 & 1-3 & 2 \\ 1 & 2 & -2-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I} \leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}+5\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}+\mathrm{II},\ \mathrm{III}-3\mathrm{II}}{\overset{-\frac{1}{3}\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist

$$\dim(\mathrm{Eig}(S;1)) = 3 - \mathrm{Rang}(S - 1 \cdot E_3) = 3 - 2 = 1,$$

und der Endomorphismus s ist die Geradenspiegelung an der Geraden

$$\mathrm{Eig}(S;1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die gegebene Matrix

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ist gemäß

$$D^\top \cdot D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal und besitzt die Determinante

$$\det(D) = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{27} \cdot \big((4+4+4) - (1+(-8)+(-8))\big) = 1;$$

damit beschreibt der Endomorphismus

$$d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad d(x) = D \cdot x,$$

eine Drehung; wegen

$$D - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2-3 & -2 & 1 \\ 2 & 1-3 & -2 \\ 1 & 2 & 2-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}+2\text{II}}{\overset{-\frac{1}{6}\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man als Drehachse

$$\operatorname{Eig}(S; 1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und für den Drehwinkel δ von d ergibt sich

$$1 + 2\cos\delta = \operatorname{Spur}(D) = \frac{2+1+2}{3} = \frac{5}{3}, \qquad \text{also} \qquad \cos\delta = \frac{1}{3}.$$

c) Das Matrixprodukt $P = S \cdot D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

ist zunächst als Produkt der beiden orthogonalen Matrizen S und D selbst orthogonal. Damit ist P als orthogonale Matrix genau dann diagonalisierbar, wenn P symmetrisch ist; dies ist aber wegen $P^\top \neq P$ nicht der Fall.

4. a) Die im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebenen Punkte

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

liegen genau dann auf einer gemeinsamen Ebene E, wenn die drei Richtungsvektoren

$$u_1 = b - a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = c - a = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = d - a = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind; dies trifft wegen

$$\begin{aligned} \det\big(u_1,\, u_2, u_3\big) \quad &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha - 1 & 0 \\ \alpha - 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &\underset{\text{Sarrus}}{=} \big(0 + 0 + 0\big) - \big((\alpha - 1)^3 + 0 + 1^3\big) = (1 - \alpha)^3 - 1 \end{aligned}$$

mit

$$\det\big(u_1,\, u_2, u_3\big) = 0 \iff (1 - \alpha)^3 = 1 \iff 1 - \alpha = 1 \iff \alpha = 0$$

genau für $\alpha = 0$ zu. In diesem Fall besitzt die Ebene E den Trägerpunkt a sowie den Normalenvektor

$$\widetilde{u} = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und damit die Gleichung

$$\widetilde{u} \circ x = \widetilde{u} \circ a \qquad \text{bzw.} \qquad -x_1 - x_2 - x_3 = -3;$$

wegen $\|\widetilde{u}\| = \sqrt{3}$ und $\widetilde{u} \circ a < 0$ besitzt E die Hessesche Normalform

$$\frac{-x_1 - x_2 - x_3 - (-3)}{-\sqrt{3}} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{x_1 + x_2 + x_3 - 3}{\sqrt{3}} = 0.$$

Als Abstand des Nullpunkts 0 von der Ebene E ergibt sich damit

$$\operatorname{dist}(0, E) = \left| \frac{0 + 0 + 0 - 3}{\sqrt{3}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{3}} \right| = \sqrt{3}.$$

b) Da für die Wahl $\alpha = 1$ die vier Punkte a, b, c, d gemäß a) nicht auf einer gemeinsamen Ebene liegen, bilden sie ein Tetraeder, also ein affines Koordinatensystem von $\mathbb{R}^3$; damit gibt es gemäß dem Prinzip der affinen Fortsetzung genau eine affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad f(c) = d, \quad f(d) = a.$$

Für die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie den Vektor $t \in \mathbb{R}^3$ von f gilt demnach

$$\begin{aligned} M \cdot a + t = f(a) = b, &\qquad M \cdot b + t = f(b) = c \\ M \cdot c + t = f(c) = d, &\qquad M \cdot d + t = f(d) = a \end{aligned}$$

und durch Differenzbildung damit

$$M \cdot \underbrace{(b-a)}_{=u_1} = c - b, \qquad M \cdot \underbrace{(c-a)}_{=u_2} = d - b, \qquad M \cdot \underbrace{(d-a)}_{=u_3} = a - b;$$

wegen

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$$

erhält man

$$\begin{aligned} M &= M \cdot E_3 = M \cdot (e_1, e_2, e_3) = \\ &= (M \cdot e_1,\ M \cdot e_2,\ M \cdot e_3) = (M \cdot u_2,\ M \cdot u_1,\ M \cdot e_3) = \\ &= (d-b,\ c-b,\ a-b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} t = b - M \cdot a &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$