MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Klausur
09.08.2016

Klausur zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

1. a) Man definiere für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Begriffe
   - „Eigenvektor von A zu λ“ und „Eigenraum von A zu λ“ (1)
   - „algebraische Vielfachheit“ und geometrische Vielfachheit“ (1)

   und formuliere
   - den „Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen“. (1)

   b) Man untersuche die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$ auf (reelle) Diagonalisierbarkeit. (3)

2. a) Für eine Bilinearform $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraums V definiere man die Begriffe „Symmetrie“ und „positive Definitheit“. Ferner bestimme man alle $s, t \in \mathbb{R}$, für die die Bilinearform

$$\sigma_{s,t} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \sigma_{s,t}(x, y) = x^\top A_{s,t}\, y,$$

   auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit der Matrix

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & s & t \\ 1 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

   symmetrisch und positiv definit ist. (3)

   b) Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ bestimme man für den Untervektorraum

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2\,x_3 - 6\,x_4 = 0 \right\}$$

   eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$. (3)

3. Man betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$; ferner seien die beiden Matrizen

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Man zeige, daß der Endomorphismus

$$s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad s(x) = S \cdot x,$$

eine Geradenspiegelung beschreibt, und gebe die Spiegelgerade an. (2)

b) Man zeige, daß der Endomorphismus

$$d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad d(x) = D \cdot x,$$

eine Drehung beschreibt, und gebe die Drehachse sowie den Cosinus des Drehwinkels an. (2)

c) Man untersuche das Matrixprodukt $S \cdot D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ auf Orthogonalität und Diagonalisierbarkeit. (2)

4. Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben; dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Man zeige, daß die vier Punkte a, b, c und d genau dann auf einer gemeinsamen Ebene E liegen, wenn $\alpha = 0$ ist. Man bestimme die Hessesche Normalform von E sowie den Abstand des Nullpunkts von E. (3)

b) Es sei nun $\alpha = 1$ gewählt. Man zeige, daß es genau eine affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(a) = b, \quad f(b) = c, \quad f(c) = d \quad \text{und} \quad f(d) = a$$

gibt, und bestimme ihre Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sowie ihren Vektor $t \in \mathbb{R}^3$. (3)