Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. a) Die drei Richtungsvektoren

$$u_1 = P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$u_3 = P_3 - P_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vom Punkt P_0 zu den Punkten P_1, P_2 und P_3 sind wegen

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (0 - 1 - 4) - (-8 + 0 + 2) = 1 \neq 0$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$, insbesondere also linear unabhängig; damit sind aber die Punkte P_0, P_1, P_2 und P_3 in keiner affinen Ebene (der Dimension 2) des $\mathbb{R}^3$ enthalten.

b) Gemäß a) bilden P_0, P_1, P_2, P_3 ein affines Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$, weswegen es zu je vier Punkten Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 des $\mathbb{R}^3$ genau eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = A \cdot x + b$, mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ gibt, für die

$$f(P_0) = Q_0, \quad f(P_1) = Q_1, \quad f(P_2) = Q_2 \quad \text{und} \quad f(P_3) = Q_3$$

gilt; dabei ist hier

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(Es sei angemerkt, daß hier auch die Richtungsvektoren $w_1 = Q_1 - Q_0 = e_1$, $w_2 = Q_2 - Q_0 = e_2$ und $w_3 = Q_3 - Q_0 = e_3$ vom Punkt Q_0 zu den Punkten

Q_1, Q_2 und Q_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ sind, weswegen auch Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 ein affines Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden und folglich die affine Abbildung f sogar bijektiv ist.)

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} A\cdot P_0 + b &= f(P_0) = Q_0 \\ A\cdot P_1 + b &= f(P_1) = Q_1 \\ A\cdot P_2 + b &= f(P_2) = Q_2 \\ A\cdot P_3 + b &= f(P_3) = Q_3 \end{aligned}$$

sowie durch Differenzbildung dann

$$\begin{array}{lcl} A\cdot(P_1 - P_0) = Q_1 - Q_0, & \quad\text{also}\quad & A\cdot u_1 = e_1, \\ A\cdot(P_2 - P_0) = Q_2 - Q_0, & \quad\text{also}\quad & A\cdot u_2 = e_2, \\ A\cdot(P_3 - P_0) = Q_3 - Q_0, & \quad\text{also}\quad & A\cdot u_3 = e_3. \end{array}$$

Mit $B = (u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $E_3 = (e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ erhält man also

$$A\cdot B = A\cdot(u_1,u_2,u_3) = (A\cdot u_1, A\cdot u_2, A\cdot u_3) = (e_1,e_2,e_3) = E_3$$

und folglich

$$A = B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\cdot \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie damit

$$b = Q_0 - A\cdot P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (-20-24-21)-(-18-20-28) = 1 \neq 0$$

ist f eine Affinität.

50. Die gegebene Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 = 5\}$ besitzt den Normalenvektor $\widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit ist der Bildpunkt $f(p)$ des Punktes $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der Orthogonalprojektion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf die Ebene E aber genau der Schnittpunkt der Geraden $\ell = p + \mathbb{R}\cdot\widetilde{u}_E$ (also der Lotgeraden des Punktes p auf die Ebene E) mit der Ebene E selbst. Damit ist

$$f(p) = p + \lambda_p \cdot \widetilde{u}_E = \begin{pmatrix} p_1 + 2\,\lambda_p \\ p_2 + \lambda_p \\ p_3 + 2\,\lambda_p \end{pmatrix} \in \ell$$

für einen geeigneten Parameter $\lambda_p \in \mathbb{R}$, wobei wegen $f(p) \in E$ dann

$$2\,(p_1 + 2\,\lambda_p) + (p_2 + \lambda_p) + 2\,(p_3 + 2\,\lambda_p) = 5,$$

also

$$2\,p_1 + p_2 + 2\,p_3 + 9\,\lambda_p = 5 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_p = -\tfrac{2}{9}\,p_1 - \tfrac{1}{9}\,p_2 - \tfrac{2}{9}\,p_3 + \tfrac{5}{9},$$

gilt. Folglich erhält man

$$\begin{aligned} f(p) = p + \lambda_p \cdot \widetilde{u}_E &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{2}{9}\,p_1 - \tfrac{1}{9}\,p_2 - \tfrac{2}{9}\,p_3 + \tfrac{5}{9}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{9}\,p_1 - \frac{2}{9}\,p_2 - \frac{4}{9}\,p_3 + \frac{10}{9} \\ -\frac{2}{9}\,p_1 + \frac{8}{9}\,p_2 - \frac{2}{9}\,p_3 + \frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9}\,p_1 - \frac{2}{9}\,p_2 + \frac{5}{9}\,p_3 + \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $f(p) = A \cdot p + t$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

51. Wir ermitteln zunächst im ersten Schritt die notwendige Gestalt einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und eines Vektors $b \in \mathbb{R}^2$, so daß die damit gegebene Bewegung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = A \cdot x + b,$$

die geforderten Eigenschaften

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

besitzt, und überprüfen dann im zweiten Schritt, ob die gefundenen Abbildungen auch tatsächlich das Gewünschte leisten. Wegen

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich durch Differenzbildung die notwendige Bedingung

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

für die orthogonale Matrix $A \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ gibt es die beiden folgenden Möglichkeiten:

- Ist A eine Drehmatrix, gilt also

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{array}{rcrcl} \cos\varphi & + & \sin\varphi & = & 1 \\ \sin\varphi & - & \cos\varphi & = & 1 \end{array}$$

also $\sin\varphi = 1$ und $\cos\varphi = 0$. Somit kommt in diesem Fall nur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in Frage.

- Ist A eine Spiegelungsmatrix, gilt also

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\varphi \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{array}{rcrcl} \cos\varphi & - & \sin\varphi & = & 1 \\ \sin\varphi & + & \cos\varphi & = & 1 \end{array}$$

also $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = 0$. Somit kommt in diesem Fall nur

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in Frage.

Wir überprüfen nun, ob die beiden in Frage kommenden affinen Abbildungen die gewünschten Eigenschaften besitzen:

- Die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A \cdot x + b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist wegen $A = D_{\frac{\pi}{2}} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ eine (eigentliche) Bewegung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, und es gilt

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = A \cdot x + b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist wegen $A = S_0 \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ eine (uneigentliche) Bewegung der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$, und es gilt

$$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

und

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Damit gibt es genau zwei Bewegungen der euklidischen Ebene, die die gewünschten Eigenschaften besitzen.

52. a) Für die Seitenlängen des Dreiecks Δ ergibt sich

$$d(a,b) = d\left(\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{2},$$

$$d(a,c) = d\left(\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}\right\| = 10,$$

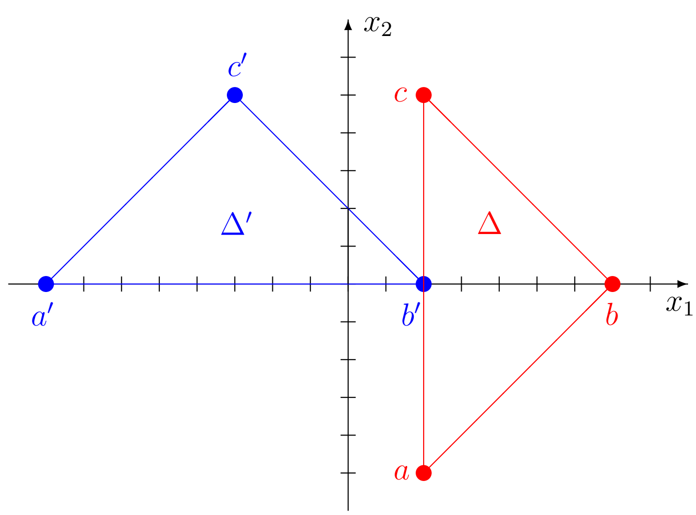
$$d(b,c) = d\left(\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{2};$$

ferner ergibt sich für die Seitenlängen des Dreiecks Δ'

$$d(a',b') = d\left(\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-10\\0\end{pmatrix}\right\| = 10,$$

$$d(a',c') = d\left(\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-5\\-5\end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{2},$$

$$d(b',c') = d\left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}\right\| = 5\sqrt{2}.$$



b) Aufgrund der Längen– und Orientierungstreue der Abbildung d gilt

$$d(a) = b', \quad d(b) = c' \quad \text{und} \quad d(c) = a';$$

damit ist aber wegen $d(x) = D \cdot x + t$

$$D \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; D \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \; D \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich durch Differenzbildung der zweiten und dritten Beziehung jeweils mit der ersten Beziehung

$$D \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt; damit ist

$$D \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} D = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und folglich

$$t = b' - D \cdot a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$D \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \det(D) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

beschreibt d eine orientierungstreue Abbildung, also eine Drehung (um $\frac{\pi}{2}$) in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Wir überprüfen nun, ob die Abbildung

$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad d(x) = D \cdot x + t,$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad t = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

auch tatsächlich die gewünschten Eigenschaften besitzt.
Wegen

$$d\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$d\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$d\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}.$$

gibt es genau eine Drehung mit den gewünschten Eigenschaften.

c) Für das Drehzentrum z der Drehung d ergibt sich

$$z=(E-D)^{-1}\cdot t=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$