

Tutorium zur Vorlesung
„Lineare Algebra und analytische Geometrie II“
— Bearbeitungsvorschlag —

45. a) Mit dem Trägerpunkt $t = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den beiden Richtungsvektoren

$u_1 = B - A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $u_2 = C - A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergibt sich zunächst für die Ebene durch A , B und C die Parameterdarstellung

$$E = t + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Normalenvektor

$$\tilde{u}_E = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für E die Gleichung

$$\tilde{u}_E \circ x = \tilde{u}_E \circ t, \quad \text{also} \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 = -2$$

und wegen $\|\tilde{u}_E\| = \sqrt{6}$ und $\tilde{u}_E \circ t < 0$ die Hessesche Normalform

$$\frac{-x_1 + 2x_2 + x_3 + 2}{-\sqrt{6}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_1 - 2x_2 - x_3 - 2}{\sqrt{6}} = 0.$$

Damit ist

$$d(D, E) = \left| \frac{0 - 2 \cdot 1 - (-\frac{5}{2}) - 2}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{6}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{6}}.$$

b) Mit dem Trägerpunkt $t_\ell = D$ und dem Richtungsvektor $u_\ell = \tilde{u}_E$ (da ℓ senkrecht zu E) ergibt sich für die gesuchte Lotgerade die Parameterdarstellung

$$\ell = t_\ell + \mathbb{R} \cdot u_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $L = \ell \cap E$ gilt $L = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1+2\lambda \\ -\frac{5}{2} + \lambda \end{pmatrix} \in \ell$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$,
wobei wegen $L \in E$ gilt

$$-1 \cdot (-\lambda) + 2 \cdot (1+2\lambda) + 1 \cdot \left(-\frac{5}{2} + \lambda\right) = -2, \quad \text{also} \quad \lambda = -\frac{1}{4}$$

und damit

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

46. Die Ebene $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $x + y = 1$ besitzt den Normalenvektor $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Länge $\|\tilde{u}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$; damit besitzt E_1 die Hessesche Normalform

$$\frac{x + y - 1}{\sqrt{2}} = 0,$$

womit sich für den Abstand $d(0, E_1)$ des Nullpunkts $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ von E_1

$$d(0, E_1) = \left| \frac{0 + 0 - 1}{\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ergibt. Die Schnittgerade $L = E_1 \cap E_2$ ist genau die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & & & & = & 1 \\ & & y & + & z & & = & 1 \end{array}$$

wodurch sich

$$L = t + \mathbb{R} \cdot u \quad \text{mit} \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Der Fußpunkt x_0 des Lotes ℓ vom Nullpunkt $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf die Gerade L besitzt (als Punkt von L) die Gestalt

$$x_0 = t + \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$; damit ist

$$x_0 - 0 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Lotgeraden ℓ , der allerdings auf dem Richtungsvektor u der Geraden L senkrecht stehen muß. Aus

$$0 = u \circ (x_0 - 0) = 1 \cdot \lambda + (-1) \cdot (1 - \lambda) + 1 \cdot \lambda = -1 + 3\lambda$$

ergibt sich $\lambda = \frac{1}{3}$ und damit $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich für den Abstand $d(0, L)$ des Nullpunkts 0 von der Geraden L

$$\begin{aligned} d(0, L) = d(0, x_0) = \|x_0 - 0\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \sqrt{6}. \end{aligned}$$

47. a) Es ist $g_1 = t_1 + \mathbb{R} u_1$ und $g_2 = t_2 + \mathbb{R} u_2$ mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sowie } t_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da die Richtungsvektoren u_1, u_2 linear unabhängig sind, können die Geraden g_1 und g_2 nicht parallel sein. Zudem gibt es unter der Annahme, daß sich g_1 und g_2 schneiden, Parameter α und $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

führt, das jedoch wegen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 8 \\ -1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-4\text{II}]{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -42 \end{array} \right)$$

keine Lösung besitzt. Folglich sind g_1 und g_2 windschief.

b) Die gemeinsame Lotgerade ℓ der Geraden g_1 und g_2 besitzt den Richtungsvektor

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};$$

seien x_1 und x_2 die Lotfußpunkte auf g_1 und g_2 . Dabei besitzt x_1 (als Punkt von g_1) die Gestalt

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit einem geeigneten $\tau \in \mathbb{R}$, wodurch sich für die gemeinsame Lotgerade

$$\ell = x_1 + \mathbb{R} \cdot \tilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ergibt; folglich erhält man für den Lotfußpunkt x_2 die Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in g_2}$$

mit geeigneten Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & -9 & -1 & 10 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{III} \cdot \frac{1}{2}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}]{\text{III}+3\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array} \right) \end{aligned}$$

erhält man $\mu = -1$, $\lambda = -1$ und $\tau = 2$, so daß sich

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ergibt. Für die Lotgerade erhält man damit

$$\ell = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$d(g_1, g_2) = d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{42}.$$

48. Für die im $\mathbb{R}^4$, versehen mit dem Standardskalarprodukt $\circ$, gegebenen Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

werden die (affine) Ebene $U = u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 + \mathbb{R} \cdot u_3$ mit dem Trägerpunkt u_1 und dem Richtungsraum $\langle u_2, u_3 \rangle$ und die (affine) Gerade $V = v_1 + \mathbb{R} \cdot v_2$ mit dem Trägerpunkt v_1 und dem Richtungsraum $\langle v_2 \rangle$ betrachtet; ferner ist

$$W = \mathbb{R} \cdot u_2 + \mathbb{R} \cdot u_3 + \mathbb{R} \cdot v_2 = \langle u_2, u_3 \rangle + \langle v_2 \rangle$$

die Summe der beiden Richtungsräume.

- a) Das orthogonale Komplement $W^\perp$ von $W = \langle u_2, u_3, v_2 \rangle$ in $\mathbb{R}^4$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $B^\top \cdot x = 0$ mit der Hilfsmatrix $B = (u_2, u_3, v_2) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ überein; wegen

$$\begin{aligned} B^\top &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -4 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\text{II}+3 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-2 \cdot \text{I}]{\text{I}-\text{II}} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+2 \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist

$$\tilde{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis von $W^\perp$.

- b) Für den Abstand der beiden affinen Teilmengen U und V von $\mathbb{R}^4$ gilt

$$\text{dist}(U, V) = \text{dist}(u_0, v_0) = \|u_0 - v_0\|,$$

wobei $u_0 \in U$ und $v_0 \in V$ die Lotfußpunkte einer gemeinsamen Lotgeraden ℓ von U und V bezeichnen; diese besitzt gemäß a) den Richtungsvektor $\tilde{w}$. Als Trägerpunkt kann der Lotfußpunkt $u_0 \in U$ gewählt werden, der (als Punkt auf U) die Gestalt

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt, wobei sich dann für den Lotfußpunkt v_0 die beiden Darstellungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in V}$$

mit geeigneten Parametern $\gamma, \tau \in \mathbb{R}$ ergeben. Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

welches wegen

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -4 & -1 & -2 & | & 0 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2 \cdot \text{I}, \text{IV}+3 \cdot \text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & | & 2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-3 \cdot \text{II}]{\text{III}-2 \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-2 \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & | & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & | & 3 \end{pmatrix}$$

die Lösung $\tau = \frac{1}{2}$, $\gamma = -2$, $\beta = -\frac{3}{2}$, $\alpha = -\frac{7}{2}$ besitzt; folglich ist

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u_0 - v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und damit $\text{dist}(U, V) = \|u_0 - v_0\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.