MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 11
29.06.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

41. a) Die Ebene $E_2 = t + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2$ mit

$$t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt wegen

$$u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \cdot \widetilde{u} \quad \text{mit} \quad \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

den Normalenvektor $\widetilde{u}$ und damit die Gleichung

$$E_2 \quad : \quad \widetilde{u} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \widetilde{u} \circ t \qquad \text{bzw.} \qquad x - z = 2.$$

Die Schnittgerade s der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist damit die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} E_2 & : & x & & & - & z & = & 2 \\ E_1 & : & -6\,x & + & 4\,y & - & 10\,z & = & -20 \end{array}$$

und besitzt wegen

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & -10 & -20 \end{array} \right) \overset{\text{II}+6\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -16 & -8 \end{array} \right)$$

die Parameterdarstellung

$$h = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Koordinaten $x_P = 0$, $y_P = 0$ und $z_P = -2$ des Punktes P genügen gemäß

$$x_P - z_P = 0 - (-2) = 2$$

der Gleichung der Ebene E_2; damit liegt P in der Ebene E_2.

Die Gerade g, welche im Punkt P senkrecht auf der Ebene E_2 steht, besitzt nun den Trägerpunkt P und den Richtungsvektor $\widetilde{u}$, also die Parameterdarstellung

$$g = P + \mathbb{R} \cdot \widetilde{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) Der Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E_1 besitzt (als Punkt von g) die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -2 - \lambda \end{pmatrix}$$

für einen geeigneten Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$, wobei wegen $S \in E_1$ dann

$$-6 \cdot \lambda + 4 \cdot 0 - 10 \cdot (-2 - \lambda) = -20,$$

also

$$4 \cdot \lambda = -40 \qquad \text{und damit} \qquad \lambda = -10$$

gilt; folglich ist

$$S = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

42. Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2\,y = -1 \right\}$$

und zu gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}$ die Teilmenge

$$g_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - \lambda\, z = -1 \text{ und } -2\,x - 3\,y + \lambda\, z = 1 + \lambda \right\}.$$

a) Die Teilmenge g_λ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ besteht genau aus den Punkten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, welche den beiden Bedingungen

$$x + y - \lambda\, z = -1 \qquad \text{und} \qquad -2\,x - 3\,y + \lambda\, z = 1 + \lambda$$

genügen, ist also die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -3 & \lambda & 1 + \lambda \end{array} \right) \overset{\text{II}+2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda & -1 + \lambda \end{array} \right) \overset{\text{I}+\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2\,\lambda & -2 + \lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & -1 + \lambda \end{array} \right).$$

Wegen $\operatorname{Rang}(A\,|\,b) = 2$ ist die Teilmenge g_λ unabhängig von $\lambda \in \mathbb{R}$ eindimsional, also eine Gerade mit der Gestalt

$$g_\lambda = x_p + L_0 = t_{g_\lambda} + \mathbb{R} \cdot u_{g_\lambda} = \begin{pmatrix} -2+\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir betrachten die beiden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2\,y = -1 \right\} \text{ und } g_\lambda = \begin{pmatrix} -2+\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix};$$

ein gemeinsamer Punkt S von g_λ und E besitzt als Punkt von g_λ die Parameterdarstellung

$$S = \begin{pmatrix} -2+\lambda \\ 1-\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2\,\lambda \\ -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\lambda+\mu\cdot 2\,\lambda \\ 1-\lambda+\mu\cdot(-\lambda) \\ \mu \end{pmatrix}$$

für ein $\mu \in \mathbb{R}$ und genügt als Punkt von E der Ebenengleichung, also

$$(-2+\lambda+\mu\cdot 2\,\lambda) + 2\cdot(1-\lambda+\mu\cdot(-\lambda)) = -1 \iff \lambda = 1,$$

und wir erhalten:

- Für $\lambda \neq 1$ sind g_λ und E ohne gemeinsamen Punkt.
- Für $\lambda = 1$ erfüllt jeder Punkt auf G_1 (unabhängig von $\mu \in \mathbb{R}$) die Gleichung von E, es ist also $G_1 \subseteq E$ und damit $G_1 \cap E = G_1$.

43. Im Raum $\mathbb{R}^4$ sind in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die beiden Ebenen

$$E_\alpha = t_1 + \mathbb{R} \cdot u_1 + \mathbb{R} \cdot u_2 \qquad \text{und} \qquad F_\alpha = t_2 + \mathbb{R} \cdot u_3 + \mathbb{R} \cdot u_4$$

mit

$$t_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben; wegen $\alpha \neq 0$ könnten für E_α auch die Richtungsvektoren

$$u_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gewählt werden, so daß E_α eigentlich nicht von α abhängig ist. Die beiden Ebenen E_α und F_α schneiden sich nun genau dann, wenn $E_\alpha \cap F_\alpha \neq \emptyset$ gilt, es also ein $v \in \mathbb{R}^4$ mit $v \in E_\alpha$ und $v \in F_\alpha$ gibt. Über die Parameterdarstellungen

$$\underbrace{t_1 + \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{\in E_\alpha} = v = \underbrace{t_2 + \lambda_3 \cdot u_3 + \lambda_4 \cdot u_4}_{\in F_\alpha}$$

führt dies zu der Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot (-u_3) + \lambda_4 \cdot (-u_4) = t_2 - t_1,$$

also zu dem linearen Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = (u_1, u_2, -u_3, -u_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = t_2 - t_1 \in \mathbb{R}^4;$$

damit gilt $E_\alpha \cap F_a \neq \emptyset$ genau dann, wenn $A \cdot x = b$ (mindestens) eine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

besitzt. Wegen

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & \alpha-2 \\ 2 & \alpha & 0 & -2 & -1 \\ 0 & \alpha & 1 & -1 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & -\alpha & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -\alpha+1 \\ 0 & \alpha & 1 & -1 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & -\alpha & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & \alpha-1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \alpha & -2 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & -\alpha & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -\alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha-2 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{Rang}(A|b) = \operatorname{Rang}(A) = 3,$$

also $2\,\alpha - 2 = 0$ bzw. $\alpha = 1$ gilt.

44. a) Wir betrachten für das durch die beiden Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & (2-b)\,x_2 & - & 2\,x_3 & & & = & 1-b \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & + & x_4 & = & a-1 \\ 2\,x_1 & - & 2\,b\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3-a-2\,b \end{array}$$

die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 2 & -2b & 1 & -1 & 3-a-2\,b \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & -4 & 5 & -1 & 1-a \end{array}\right) \underset{\text{III}+4\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3\,a-3 \end{array}\right) \underset{(-\frac{1}{3})\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2-b & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -2 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-a \end{array}\right).$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und besitzt in x_4 genau eine freie Variable; folglich ist die Lösungsmenge L eine (affine) Gerade. Für eine partikuläre Lösung x_p des inhomogenen Gleichungssystems (also einen Trägerpunkt von L) ergibt sich für $x_4 = a$ dann

- $x_3 - x_4 = 1 - a$, also $x_3 = (1-a) + x_4 = 1$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = a - 1$, also $x_2 = (a-1) + 2\,x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2-b)\,x_2 - 2\,x_3 = 1 - b$, also $x_1 = (1-b) - (2-b)\,x_2 + 2\,x_3 = 1$,

insgesamt damit

$$x_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}^\top;$$

für einen Basisvektor u des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems (also einen Richtungsvektor von L) ergibt sich für $x_4 = 1$ dann

- $x_3 - x_4 = 0$, also $x_3 = x_4 = 1$,
- $x_2 - 2\,x_3 + x_4 = 0$, also $x_2 = 2\,x_3 - x_4 = 1$,
- $x_1 + (2-b)\,x_2 - 2\,x_3 = 0$, also $x_1 = -(2-b)\,x_2 + 2\,x_3 = b$,

insgesamt damit

$$u = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Folglich erhält man

$$L = x_p + \mathbb{R} \cdot u = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Der Punkt

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda\, b \\ 1 + \lambda \\ 1 + \lambda \\ a + \lambda \end{pmatrix} \in L$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ liegt genau dann in der Hyperebene H des $\mathbb{R}^4$ mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

wenn

$$(1 + \lambda\, b) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) + (a + \lambda) = 0,$$

also

$$(b+3)\,\lambda + (3+a) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (*) \quad (b+3)\,\lambda = -\,(3+a)$$

gilt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $b \neq -3$ besitzt $(*)$ genau eine Lösung, nämlich $\lambda = -\frac{3+a}{b+3}$; folglich ist $L \cap H$ ein Punkt.
- Für $b = -3$ besitzt $(*)$ die Gestalt $0 = -(3+a)$ und damit
  - für $a \neq -3$ keine Lösung, weswegen dann $L \cap H$ leer ist, sowie
  - für $a = -3$ die Lösungsmenge $\mathbb{R}$, weswegen dann $L \subseteq H$ gilt.