

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

37. Wir ergänzen den normierten Richtungsvektor der Drehachse

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{durch} \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$. Bei den zu betrachtenden Drehungen bleibt b_1 als Punkt der Drehachse fest, während sich die Wirkung dieser Drehung um den Winkel $\varphi = \pm \frac{3\pi}{4}$ in der von b_2 und b_3 aufgespannten Lotebene niederschlägt; für die darstellende Matrix M der Drehung bezüglich b_1, b_2, b_3 ergibt sich damit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_\varphi \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

also

$$D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = D_1^\top,$$

und damit

$$M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = M_1^\top.$$

Mit

$$P = (b_1, b_2, b_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

gilt für die Abbildungsmatrix $A \in O_3(\mathbb{R})$ dieser Drehung dann $M = P^\top A P$, also

$$\begin{aligned} A_1 = P M_1 P^\top &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 2 & -2 \\ -2 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ 2 & 2 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$A_2 = PM_2P^\top = PM_1^\top P^\top = A_1^\top = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -2 & 2 \\ 2 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} \\ -2 & 2 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

38. Die gegebene Matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist wegen

$$A \cdot A^\top = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = E_3$$

orthogonal; da sie zudem die Determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{1}{9^3} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{I} - 2\text{II} \\ \text{III} - 2\text{II}}}{=} \frac{1}{9^3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 9 & -18 \\ 4 & -4 & 7 \\ -9 & 0 & -18 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{9 \text{ aus I} \\ 9 \text{ aus III}}}{=} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{9} \cdot [(0 - 7 + 0) - (-8 + 0 - 8)] = 1 \end{aligned}$$

besitzt, beschreibt die zugehörige lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x,$$

eine Drehung im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten der Drehung und stimmt daher mit dem Eigenraum von A zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$\begin{aligned} A - 1 \cdot E_3 &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8-9 & 1 & -4 \\ 4 & -4-9 & 7 \\ -1 & -8 & -4-9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 4 & -13 & 7 \\ -1 & -8 & -13 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{II}+4\text{I} \\ \text{III}+\text{I}}}{\rightsquigarrow} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{(-1) \cdot \text{I} \\ -\frac{1}{9} \cdot \text{II}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{I}+\text{II} \\ \text{III}+9\text{II}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist also etwa

$$u = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Richtungsvektor der Drehachse a , und für den Drehwinkel α gilt

$$\cos \alpha = \frac{\text{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{\frac{1}{9}(8 - 4 - 4) - 1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

39. a) Zu den gegebenen Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Hilfsmatrix

$$B = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3};$$

wegen $B^\top B = E_3$ ist die Matrix $B \in O_3(\mathbb{R})$ orthogonal, so daß ihre Spalten v_1, v_2, v_3 eine Orthonormalbasis des euklidischen $\mathbb{R}^3$ bilden. Insbesondere ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(v_1) = e_1, \quad \varphi(v_2) = e_2, \quad \varphi(v_3) = e_3.$$

Für die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ von φ gilt damit

$$A \cdot v_1 = \varphi(v_1) = e_1, \quad A \cdot v_2 = \varphi(v_2) = e_2, \quad A \cdot v_3 = \varphi(v_3) = e_3,$$

insgesamt also

$$A \cdot B = A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A \cdot v_1, A \cdot v_2, A \cdot v_3) = (e_1, e_2, e_3) = E_3,$$

und damit $A = B^{-1}$; da die Matrix B orthogonal ist, ist auch $A = B^\top$ eine orthogonale Matrix und folglich $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung.

b) Die Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist gemäß a) orthogonal, und es gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{27} \cdot ((8 + 8 + (-1)) - ((-4) + (-4) + (-4))) = 1; \end{aligned}$$

folglich beschreibt die orthogonale Abbildung φ eine Drehung. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten von φ und stimmt daher mit dem Eigenraum von A zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$\begin{aligned} A - 1 \cdot E_3 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-3 & 2 & -1 \\ 1 & -2-3 & -2 \\ -2 & 1 & -2-3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II}+\text{I} \\ \text{III}-2\text{I} \end{matrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \cdot \text{I} \\ -\frac{1}{3} \cdot \text{II} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I}+2\text{II} \\ \text{III}+3\text{II} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und für den Drehwinkel α gilt

$$\cos \alpha = \frac{\text{Spur}(A) - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3}(2 - 2 - 2) - 1}{2} = -\frac{5}{6}.$$

40. Für die Abbildungsmatrizen A und $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der beiden linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) = A \cdot x$, und $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(x) = B \cdot x$, gilt

$$A \cdot e_1 = \varphi(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_2 = \varphi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e_3 = \varphi(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$B \cdot e_1 = \psi(e_1) = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot e_2 = \psi(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B \cdot e_3 = \psi(e_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

und damit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Für die Hintereinanderausführung

$$\tau = \psi \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tau(x) = C \cdot x,$$

ergibt sich damit

$$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

ist τ eine orthogonale Abbildung, und wegen

$$\det(C) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 \right) - \left(0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 1$$

ist τ auch orientierungserhaltend und damit ein Drehung. Die Drehachse a besteht aus allen Fixpunkten von τ und stimmt daher mit dem Eigenraum von C zum Eigenwert 1 überein; wegen

$$\begin{aligned} C - 1 \cdot E_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} - 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{I} \cdot \sqrt{2} (1 + \sqrt{2}) \\ \text{II}, \text{III} \cdot 2 \end{matrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} + \text{I} \\ \text{III} + \text{I} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{II} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{2}) \\ \text{III} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \text{III} + \text{II} \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 + \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist also

$$a = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 + \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

wobei mehrfach von der dritten binomischen Formel

$$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

Gebrauch gemacht wurde. Für den Drehwinkel δ von τ gilt

$$\cos \delta = \frac{\text{Spur}(C) - 1}{2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2} = -\frac{3}{4}.$$