MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 9
14.06.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

33. a) Die Gerade $U = \langle u_1 \rangle$ mit $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ besitzt das orthogonale Komplement

$$U^\perp = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3\,x_1 + 4\,x_3 = 0 \right\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in U^\perp} \qquad \text{mit} \qquad u = \lambda \cdot u_1 \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$\widetilde{u} = x - \lambda \cdot u_1 = \begin{pmatrix} x_1 - 3\lambda \\ x_2 \\ x_3 - 4\lambda \end{pmatrix} \in U^\perp$$

zunächst

$$3 \cdot (x_1 - 3\lambda) + 4 \cdot (x_3 - 4\lambda) = 0, \qquad \text{also} \qquad 3\,x_1 + 4\,x_3 = 25\lambda,$$

und damit $\lambda = \frac{1}{25}\,(3\,x_1 + 4\,x_3)$ folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_U(x) &= u - \widetilde{u} = \lambda \cdot u_1 - (x - \lambda \cdot u_1) = 2\lambda\,u_1 - x = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{25}\,(3\,x_1 + 4\,x_3) \cdot 3 - x_1 \\ \frac{2}{25}\,(3\,x_1 + 4\,x_3) \cdot 0 - x_2 \\ \frac{2}{25}\,(3\,x_1 + 4\,x_3) \cdot 4 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{25}x_1 + \frac{24}{25}x_3 \\ -x_2 \\ \frac{24}{25}x_1 + \frac{7}{25}x_3 \end{pmatrix} = A \cdot x \end{aligned}$$

mit

$$A = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 0 & 24 \\ 0 & -25 & 0 \\ 24 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Alternativ können wir auch Orthonormalbasen

$$b_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ von } U \qquad \text{bzw.} \qquad b_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ von } U^\perp$$

betrachten; damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ mit

$$A \cdot b_1 = b_1 \qquad \text{sowie} \qquad A \cdot b_2 = -b_2 \quad \text{und} \quad A \cdot b_3 = -b_3,$$

so daß sich

$$A \cdot (b_1, b_2, b_3) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3) = (b_1, -b_2, -b_3)$$

und damit wegen $(b_1, b_2, b_3) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dann

$$\begin{aligned} A &= (b_1, -b_2, -b_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)^\top = \\ &= \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & 0 & 24 \\ 0 & -25 & 0 \\ 24 & 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ergibt.

b) Die Ebene $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ besitzt das orthogonale Komplement

$$U^\perp = \langle \widetilde{v} \rangle \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{v} = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und folglich die Darstellung

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \right\}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ betrachten wir die Zerlegung

$$x = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{\widetilde{u}}_{\in U^\perp} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{u} = \lambda \cdot \widetilde{v} \qquad \text{für ein} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

woraus wegen

$$u = x - \lambda \cdot \widetilde{v} = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda \\ x_2 + 2\lambda \\ x_3 - 2\lambda \end{pmatrix} \in U$$

zunächst

$$(x_1 - \lambda) - 2(x_2 + 2\lambda) + 2(x_3 - 2\lambda) = 0, \quad \text{also} \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9\lambda,$$

und damit $\lambda = \frac{1}{9}(x_1 - 2x_2 + 2x_3)$ folgt. Somit ist

$$\begin{aligned} s_U(x) &= u - \widetilde{u} = (x - \lambda \cdot \widetilde{v}) - \lambda \cdot \widetilde{v} = x - 2\lambda\,\widetilde{v} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{2}{9} \cdot (x_1 - 2x_2 + 2x_3) \cdot 1 \\ x_2 - \frac{2}{9}(x_1 - 2x_2 + 2x_3) \cdot (-2) \\ x_3 - \frac{2}{9}(x_1 - 2x_2 + 2x_3) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7x_1 + 4x_2 - 4x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 \\ -4x_1 + 8x_2 + x_3 \end{pmatrix} = A \cdot x \end{aligned}$$

mit
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Alternativ können wir auch Orthonormalbasen
$$b_1 = \tfrac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ von } U \quad \text{bzw.} \quad b_3 = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ von } U^\perp$$
betrachten; damit ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \circ)$ mit
$$A \cdot b_1 = b_1 \quad \text{und} \quad A \cdot b_2 = b_2 \quad \text{sowie} \quad A \cdot b_3 = -b_3,$$
so daß sich
$$A \cdot (b_1, b_2, b_3) = (A \cdot b_1, A \cdot b_2, A \cdot b_3) = (b_1, b_2, -b_3)$$
und damit wegen $(b_1, b_2, b_3) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dann
$$A = (b_1, b_2, -b_3) \cdot (b_1, b_2, b_3)^\top =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$
ergibt.

34. Die gegebene Matrix
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
ist wegen
$$A \cdot A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$
orthogonal sowie wegen
$$A^\top = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} = A$$
auch symmetrisch. Dementsprechend beschreibt die zugehörige lineare Abbildung
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x,$$
eine (Orthogonal–) Spiegelung an ihrer Fixpunktmenge
$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = x\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot x = 1 \cdot x\right\} = \mathrm{Eig}(A; 1);$$

wegen

$$A - 1 \cdot E_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & -8 & -4 \\ -8 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\dim U = 3 - \operatorname{Rang}(A - 1 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2,$$

und damit ist U eine Ebene.

35. Die gegebene Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

ist wegen

$$A \cdot A^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

orthogonal sowie wegen

$$A^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

auch symmetrisch. Dementsprechend beschreibt die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = A \cdot x,$$

eine (Orthogonal–)Spiegelung an ihrer Fixpunktmenge

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = x\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot x = 1 \cdot x\right\} = \operatorname{Eig}(A; 1);$$

wegen

$$A - 1 \cdot E_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV-I}}{\overset{\mathrm{II+I,\ III+I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{II}\leftrightarrow -\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV-II}}{\overset{\mathrm{I-II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis dieser Ebene.

36. Für die beiden gegebenen Ebenen

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3\,x_1 + 4\,x_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad F = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \right\}$$

wählen wir zum einen eine Orthonormalbasis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $E^\perp = \langle c_1 \rangle$ und $E = \langle c_2, c_3 \rangle$, also etwa

$$c_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

sowie zum anderen eine Orthonormalbasis d_1, d_2, d_3 von $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $F^\perp = \langle d_1 \rangle$ und $F = \langle d_2, d_3 \rangle$, also etwa

$$d_1 = e_1, \quad d_2 = e_2, \quad d_3 = e_3.$$

Da c_1, c_2, c_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung genau eine lineare Abbildung

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{mit} \qquad g(c_1) = d_1, \quad g(c_2) = d_2, \quad g(c_3) = d_3;$$

diese bildet nun $E = \langle c_2, c_3 \rangle$ auf $F = \langle d_2, d_3 \rangle$ ab. Für die Abbildungsmatrix B der linearen Abbildung g gilt

$$B \cdot c_1 = g(c_1) = d_1, \quad B \cdot c_2 = g(c_2) = d_2, \quad B \cdot c_3 = g(c_3) = d_3,$$

insgesamt also $B \cdot \underbrace{(c_1, c_2, c_3)}_{=C} = (d_1, d_2, d_3) = E_3$ und damit $B = C^{-1}$; da die Matrix C orthogonal ist, ist auch $B = C^\top$ eine orthogonale Matrix und folglich $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Abbildung. Als Abbildungsmatrix erhalten wir

$$B = C^\top = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$