MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 8
07.06.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. a) Es ist

$$\begin{aligned}
D_\varphi \cdot D_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi & -\cos\varphi\,\sin\psi - \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi & -\sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = D_{\varphi+\psi}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
S_\varphi \cdot S_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi + \sin\varphi\,\sin\psi & \cos\varphi\,\sin\psi - \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi - \cos\varphi\,\sin\psi & \sin\varphi\,\sin\psi + \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & -\sin(\varphi-\psi) \\ \sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) \end{pmatrix} = D_{\varphi-\psi}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
D_\varphi \cdot S_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi & \cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi + \cos\varphi\,\sin\psi & \sin\varphi\,\sin\psi - \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & -\cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = S_{\varphi+\psi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_\varphi \cdot D_\psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\psi + \sin\varphi\,\sin\psi & -\cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi \\ \sin\varphi\,\cos\psi - \cos\varphi\,\sin\psi & -\sin\varphi\,\sin\psi - \cos\varphi\,\cos\psi \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & \sin(\varphi-\psi) \\ \sin(\varphi-\psi) & -\cos(\varphi-\psi) \end{pmatrix} = S_{\varphi-\psi}
\end{aligned}$$

b) Jedes Produkt der Matrizen entspricht der Hintereinanderausführung der entsprechenden Drehung um den Ursprung bzw. Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden; dabei gilt:

- Die Hintereinanderausführung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung; dabei addieren sich die beiden Drehwinkel auf.
- Die Hintereinanderausführung zweier Achsenspiegelung ist eine Drehung; dabei ist der Drehwinkel doppelt so groß wie der zwischen der ersten und der zweiten Achse eingeschlossene Winkel.
- Die Hintereinanderausführung einer Achsenspiegelung und anschließend einer Drehung ist wieder eine Achsenspiegelung; dabei ist die Spiegelungsachse um den halben Drehwinkel in mathematisch positiver Richtung gedreht.
- Die Hintereinanderausführung einer Drehung und anschließend einer Achsenspiegelung ist wieder eine Achsenspiegelung; dabei ist die Spiegelungsachse um den halben Drehwinkel in mathematisch negativer Richtung gedreht.

30. a) Eine orthogonale Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = w$ bildet den zu v senkrechten Vektor $v^\perp = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ der Länge $\|v^\perp\| = \sqrt{65}$ auf einen zu w senkrechten Vektor x (wegen der Winkeltreue) der Länge $\|x\| = \sqrt{65}$ (wegen der Längentreue) ab; damit ist aber $f(v^\perp) = \pm w^\perp$ mit $w^\perp = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $f_1 = \ell_{A_1}$ mit

$$f_1(v) = w \qquad \text{und} \qquad f_1(v^\perp) = w^\perp$$

gilt $A_1 \cdot (v, v^\perp) = (A_1 \cdot v, A_1 \cdot v^\perp) = (w, w^\perp)$ und damit

$$A_1 = (w, w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{65} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix},$$

und für $f_2 = \ell_{A_2}$ mit

$$f_2(v) = w \qquad \text{und} \qquad f_2(v^\perp) = -w^\perp$$

gilt $A_2 \cdot (v, v^\perp) = (A_2 \cdot v, A_2 \cdot v^\perp) = (w, -w^\perp)$ und damit

$$A_2 = (w, -w^\perp) \cdot (v, v^\perp)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{65} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix};$$

man sieht sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind.

Alternativ kann man auch die allgemeine Gestalt

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

orthogonaler 2×2–Matrizen ansetzen und $\varphi \in \mathbb{R}$ so bestimmen, daß

$$D_\varphi \cdot v = w \qquad \text{bzw.} \qquad S_\varphi \cdot v = w$$

erfüllt ist. Für D_φ ergibt sich dabei

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcrcrl} 7\,\cos\varphi & - & 4\,\sin\varphi & = & 1 & \text{(I)} \\ 7\,\sin\varphi & + & 4\,\cos\varphi & = & -8 & \text{(II)} \end{array}$$

woraus man durch $7 \cdot \text{(I)} + 4 \cdot \text{(II)}$ zum einen

$$65\,\cos\varphi = -25, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = -\tfrac{5}{13},$$

sowie durch $4 \cdot \text{(I)} - 7 \cdot \text{(II)}$ zum anderen

$$-65\,\sin\varphi = 60, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = -\tfrac{12}{13},$$

zusammen also

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -12 & -5 \end{pmatrix},$$

erhält; für S_φ ergibt sich dagegen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{array}{rcrcrl} 7\,\cos\varphi & + & 4\,\sin\varphi & = & 1 & \text{(I)} \\ 7\,\sin\varphi & - & 4\,\cos\varphi & = & -8 & \text{(II)} \end{array}$$

woraus man durch $4 \cdot \text{(I)} + 7 \cdot \text{(II)}$ zum einen

$$65\,\sin\varphi = -52, \qquad \text{also} \qquad \sin\varphi = -\tfrac{4}{5},$$

sowie durch $7 \cdot \text{(I)} - 4 \cdot \text{(II)}$ zum anderen

$$65\,\cos\varphi = 39, \qquad \text{also} \qquad \cos\varphi = \tfrac{3}{5},$$

zusammen also

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix},$$

erhält. Man überprüft sofort, daß A_1 und A_2 orthogonale Matrizen und folglich f_1 und f_2 orthogonale Abbildungen sind, die v auf w abbilden.

b) Wegen $\det(A_1) = 1$ ist f_1 orientierungstreu; f_1 bildet ja das Rechtssystem $v, v^\perp$ auf das Rechtssystem $w, w^\perp$ ab. Die Abbildung f_1 beschreibt eine Drehung um den Ursprung, wobei für den Drehwinkel φ gilt $\cos\varphi = -\frac{5}{13}$.
Wegen $\det(A_2) = -1$ ist f_2 orientierungsumkehrend; f_2 bildet ja das Rechtssystem $v, v^\perp$ auf das Linkssystem $w, -w^\perp$ ab. Die Abbildung f_2 beschreibt eine Achsenspiegelung mit der Spiegelachse $\mathbb{R} \cdot a = \mathrm{Eig}(A_2; 1)$; wegen

$$A_2 - E_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \underset{-\frac{5}{4}\cdot \text{II}}{\overset{-\frac{5}{2}\cdot \text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist etwa $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

31. a) In „$\Longrightarrow$" ergibt sich aus $(*)$ speziell für

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad a_{11} = f(x) \circ x = 0$$

und für

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad a_{22} = f(x) \circ x = 0,$$

wodurch man für

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} \end{pmatrix} \overset{a_{11}=0}{\underset{a_{22}=0}{=}} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

ferner

$$a_{12} + a_{21} = f(x) \circ x = 0$$

erhält. In „$\Longleftarrow$" besitzt die Matrix A die Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, und für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} a\,x_2 \\ -a\,x_1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$f(x) \circ x = (a\,x_2)\,x_1 + (-a\,x_1)\,x_2 = 0,$$

also $f(x) \perp x$.

b) Die lineare Abbildung $f = \ell_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erfüllt nach a) die Bedingung $(*)$, und es gilt

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ irgendeine lineare Abbildung mit $(*)$ und $g\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Nach a) ist $g = \ell_B$ mit $B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, und es folgt

$$5\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,a \\ -3\,a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und damit $a = 5$; folglich ist $g = f$. Damit ist $f = \ell_A$ die einzige lineare Abbildung, die den beiden gestellten Bedingungen genügt.

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $(*)$. Es ist also $f = \ell_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, also

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist f genau dann eine orthogonale Abbildung, wenn A eine orthogonale Matrix ist, also genau für $a = \pm 1$. Im Falle $a = -1$ ist $A = D_{\frac{\pi}{2}}$, und im Falle $a = 1$ ist $A = D_{-\frac{\pi}{2}}$; in beiden Fällen handelt es sich also um Drehungen (um $\frac{\pi}{2}$ für $a = -1$ und um $-\frac{\pi}{2}$ für $a = 1$).

32. Für jeden Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bestimmen wir die Koordinaten des Bildvektors $f(x) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ unter dem Endomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) \circ y = \det(x, y) \qquad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}^2,$$

so daß sich speziell für die beiden Einheitsvektoren e_1 und e_2

$$x_1' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x) \circ e_1 = \det(x, e_1) = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{vmatrix} = -x_2$$

sowie

$$x_2' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f(x) \circ e_2 = \det(x, e_2) = \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} = x_1$$

ergibt. Wegen

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = D_{\frac{\pi}{2}} \cdot x$$

beschreibt f die Drehung (mit dem Ursprung als Drehzentrum) um den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$; es ist also $\cos \alpha = 0$.