

## Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. a) Die gegebene Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

ist als symmetrische Matrix orthogonal diagonalisierbar und besitzt wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} \\ &= (-\lambda(1-\lambda)^2 + 0 + 0) - (0 + (1-\lambda) + (1-\lambda)) = \\ &= (1-\lambda) \cdot (-\lambda + \lambda^2 - 2) = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  die drei einfachen Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  und  $\lambda_3 = 2$ .

b) Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$ , wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}-\frac{1}{2}\text{I}]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-2\text{II}]{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_2 = -1$ , und wegen

$$A - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{I}]{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\text{II}]{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_3 = 2$ ; für die orthogonale Matrix

$$P = \left( \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

gilt dann  $P^T A P = D$ .

22. a) Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_4) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 7-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{2. Spalte}}{=} (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{\text{I}-2 \cdot \text{II} \\ \text{III}+2 \cdot \text{II}}}{=} (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 7-\lambda & -14+2\lambda & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{(7-\lambda) \text{ aus I} \\ (7-\lambda) \text{ aus III}}}{=} (7-\lambda)(7-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{Sarrus}}{=} (7-\lambda)^3 \cdot ((6-\lambda-4+0) - (0+0+4)) \\ &= (\lambda-7)^3 \cdot (\lambda+2); \end{aligned}$$

damit besitzt  $A$  den einfachen Eigenwert  $\lambda_1 = -2$  sowie den dreifachen Eigenwert  $\lambda_2 = 7$ .

b) Wegen

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 E_4 &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9} \cdot \text{II}]{-\frac{1}{2} \cdot \text{III} \leftrightarrow \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-4 \cdot \text{I}]{\text{III}-5 \cdot \text{I}} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9} \cdot \text{III}]{\text{IV}-9 \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-9 \cdot \text{III}]{\text{I}+2 \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $\text{Eig}(A; \lambda_2)$  mit  $\|v_1\| = \sqrt{9} = 3$ ; damit ist

$$b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von  $\text{Eig}(A; \lambda_1)$ . Wegen

$$A - \lambda_2 E_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} \text{III} - \frac{1}{2} \cdot \text{I}, \text{IV} + \text{I} \\ \text{---} \frac{1}{2} \cdot \text{I} \end{smallmatrix}]{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Basis von  $\text{Eig}(A; \lambda_2)$ , und

mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren ergibt sich zunächst  $a_2 = v_2$  mit  $\|a_2\| = 1$ , also  $b_2 = a_2$ , dann

$$a_3 = v_3 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{5}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$\begin{aligned} a_4 &= v_4 - (v_4 \circ b_2) \cdot b_2 - (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\|a_4\| = \frac{\sqrt{45}}{5}, \quad \text{also} \quad b_4 = \frac{1}{\|a_4\|} \cdot a_4 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

damit ist  $b_2, b_3, b_4$  eine Orthonormalbasis von  $\text{Eig}(A; \lambda_2)$ .

c) Mit der orthogonalen Matrix

$$P = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \in O_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

gilt dann  $P^T A P = D$ .

23. Die Vektorräume  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbb{R}^4$  seien jeweils mit dem Standardskalarprodukt versehen.

a) Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist genau dann orthogonal, wenn ihre durch die gestellte Bedingung normierten Spalten aufeinander senkrecht stehen; dies läßt sich für eine beliebige Vorgabe der ersten Spalte  $x$  genau dadurch erreichen, daß als zweite Spalte  $x^\perp$  oder  $-x^\perp$  gewählt wird:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b) Sei  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit  $|a_{ij}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  für alle  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Damit gilt  $a_{11} a_{12}, a_{21} a_{22}, a_{31} a_{32} \in \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$  und damit

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} \in \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}.$$

Die ersten beiden Spalten von  $A$  stehen damit nicht senkrecht aufeinander, insbesondere kann  $A$  nicht orthogonal sein.

c) Sei  $A = (a_{ij})_{i,j} \in O_3(\mathbb{R})$  mit  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{2}{3}$  und  $a_{12} = \frac{1}{3}$ ; damit bilden die Spalten  $s_1, s_2, s_3$  sowie die Zeilen  $z_1, z_2, z_3$  jeweils eine Orthonormalbasis. Wegen  $\|s_2\| = 1$  folgt  $a_{32}^2 = \frac{4}{9}$  und damit  $a_{32} \in \{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\}$ .

Fall 1:  $a_{32} = -\frac{2}{3}$ . Wegen  $\|z_1\| = 1$  ist  $a_{13}^2 = \frac{4}{9}$ , also  $|a_{13}| = \frac{2}{3}$ , und wegen  $\|s_3\| = 1$  ist dann  $a_{23}^2 = \frac{1}{9}$ , also  $|a_{23}| = \frac{1}{3}$ ; wegen  $s_2 \perp s_3$  gilt  $\frac{1}{3} a_{13} + \frac{2}{3} a_{23} = \frac{4}{9}$ , woraus  $a_{13} = \frac{2}{3}$  und  $a_{23} = \frac{1}{3}$  folgt. Wegen  $z_1 \perp z_2$  gilt  $\frac{2}{3} a_{21} = -\frac{4}{9}$ , also  $a_{21} = -\frac{2}{3}$ , und wegen  $z_1 \perp z_3$  gilt  $\frac{2}{3} a_{31} = -\frac{2}{9}$ , also  $a_{31} = -\frac{1}{3}$ .

Fall 2:  $a_{32} = \frac{2}{3}$ . Wegen  $\|z_1\| = 1$  ist  $a_{13}^2 = \frac{4}{9}$ , also  $|a_{13}| = \frac{2}{3}$ , und wegen  $\|s_3\| = 1$  ist dann  $a_{23}^2 = \frac{1}{9}$ , also  $|a_{23}| = \frac{1}{3}$ ; wegen  $s_2 \perp s_3$  gilt  $\frac{1}{3} a_{13} + \frac{2}{3} a_{23} = -\frac{4}{9}$ ,

woraus  $a_{13} = -\frac{2}{3}$  und  $a_{23} = -\frac{1}{3}$  folgt. Wegen  $z_1 \perp z_2$  gilt  $\frac{2}{3}a_{21} = -\frac{4}{9}$ , also  $a_{21} = -\frac{2}{3}$ , und wegen  $z_1 \perp z_3$  gilt  $\frac{2}{3}a_{31} = \frac{2}{9}$ , also  $a_{31} = \frac{1}{3}$ .

Damit besitzt  $A$  notwendig die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix};$$

eine Probe bestätigt, daß die beiden angegebenen Matrizen auch tatsächlich orthogonal sind.

- d) Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  ist genau dann orthogonal, wenn ihre durch die gestellte Bedingung normierten Spalten aufeinander senkrecht stehen; dies läßt sich genau dadurch erreichen, daß bei je zwei Spalten zwei Vorzeichen übereinstimmen und zwei Vorzeichen voneinander abweichen, also etwa

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

24. Eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist genau dann symmetrisch, wenn  $M^\top = M$  gilt, und genau dann orthogonal, wenn  $M^\top \cdot M = E_n$  (oder gleichwertig  $M \cdot M^\top = E_n$ ) ist.

- a) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind (wegen  $\det(A) = -1$  und  $\det(B) = -1$ ) invertierbar und symmetrisch, ihr Produkt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist allerdings nicht symmetrisch.

- b) Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  besitzt die Gestalt  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  mit Koeffizienten  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , und für die zu  $A$  inverse Matrix gilt dann

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix};$$

folglich ist auch  $A^{-1}$  symmetrisch.

- c) Es ist

$$(C^\top A C)^\top = C^\top A^\top (C^\top)^\top \underset{A^\top = A}{=} C^\top A C;$$

folglich ist  $C^\top A C$  eine symmetrische Matrix.

d) Es ist

$$\begin{aligned}(A \cdot B)^\top \cdot (A \cdot B) &= (B^\top \cdot A^\top) \cdot (A \cdot B) = B^\top \cdot (A^\top \cdot A) \cdot B \stackrel{A^\top \cdot A = E_2}{=} \\ &= B^\top \cdot E_2 \cdot B = B^\top \cdot B = E_2;\end{aligned}$$

damit ist auch  $A \cdot B$  eine orthogonale Matrix.

e) Es ist

$$(A^{-1})^\top \cdot A^{-1} \stackrel{A^{-1} = A^\top}{=} (A^{-1})^\top \cdot A^\top = (A \cdot A^{-1})^\top = E_2^\top = E_2;$$

damit ist auch  $A^{-1}$  eine orthogonale Matrix.

f) Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

sind (wegen  $\det(A) = 1$  und  $\det(C) = 2$ ) invertierbar; darüber hinaus ist  $A$  (als Einheitsmatrix) sogar orthogonal, aber die Matrix

$$C^\top A C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ist etwa wegen  $\det(C^\top A C) = 4$ , also  $\det(C^\top A C) \neq \pm 1$ , nicht orthogonal.

Damit sind die Aussagen a) und f) falsch, die Aussagen b) bis e) dagegen richtig.