Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. a) Für $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I, III}-\text{I, IV}-\text{I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\cdot(-1)}{\overset{\text{II}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}\cdot\frac{1}{4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{III}}{\overset{\text{I}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

damit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig mit $v_4 = v_1 + v_3$. Dementsprechend bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

b) Wir wenden das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis v_1, v_2, v_3 von U an und erhalten zunächst

$$a_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{4} = 2, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

danach

$$a_2 = v_2 - (v_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{6}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und schließlich

$$a_3 = v_3 - (v_3 \circ b_1) \cdot b_1 - (v_3 \circ b_2) \cdot b_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \text{also} \quad b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ist b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von U.

c) Es ist

$$v_4 = (v_4 \circ b_1) \cdot b_1 + (v_4 \circ b_2) \cdot b_2 + (v_4 \circ b_3) \cdot b_3 = 4\, b_1 + \sqrt{6}\, b_2 + 2\sqrt{3}\, b_3.$$

18. Das Standardskalarprodukt $\circ$ auf $\mathbb{R}^5$ ist $\sigma = \sigma_A$ mit $A = E_5$. Es ist

$$B = (E_5 v_1, E_5 v_2, E_5 v_3, E_5 v_4) = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$$

mit

$$B^\top = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-2\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{3}\cdot\mathrm{II}\leftrightarrow\frac{1}{3}\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{IV}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des orthogonalen Komplements

$U^\perp$ von U. Das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren liefert damit

$$a_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \|a_1\| = \sqrt{2}, \quad \text{also} \quad b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} \cdot a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und damit

$$a_2 = u_2 - (u_2 \circ b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{10}, \quad \text{also} \quad b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle b_1, b_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ bilden die Vektoren b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\circ$ auf $\mathbb{R}^5$. Ferner ist

$$\dim(U) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(U^\perp) = 5 - 2 = 3.$$

19. a) Die für $n \in \mathbb{N}$ gegebene Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist wegen $A_n^\top = A_n$ symmetrisch, so daß die durch

$$\sigma(x, y) = x^\top A_n \, y \qquad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

definierte Bilinearform zunächst symmetrisch ist; diese ist nun genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, wenn sie zusätzlich positiv definit ist, weswegen noch nachzuweisen ist, daß die symmetrische Matrix A_n positiv definit ist. Hierfür müssen nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz alle n Hauptuntermatrizen von A_n, die hier mit $A_1, A_2, \dots, A_n$ übereinstimmen, eine positive Determinante besitzen; wir zeigen hierfür sogar

$$\det(A_k) = 1 \qquad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}$$

mit vollständiger Induktion: für „$k = 1$“ ist

$$\det(A_1) = \det(1) = 1,$$

und für „$k \to k+1$“ ist

$$\det(A_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & k \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & k+1 \end{vmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k & k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(**)}{=}$$

$$= (-1)^{(k+1)+(k+1)} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & k \end{vmatrix} = \det(A_k) = 1,$$

wobei in $(*)$ die vorletzte von der letzten Zeile subtrahiert und in $(**)$ die Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile durchgeführt wird.

b) Wir wenden auf die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathbb{R}^3$ das Gram–Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren bezüglich des durch die Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ über $\sigma(x,y) = x^\top A_3\, y$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}^3$ gegebenen Skalarprodukts an und erhalten im ersten Schritt

$$\|e_1\| = \sqrt{\sigma(e_1, e_1)} = \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_1 = \frac{1}{\|e_1\|} \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

im zweiten Schritt

$$a_2 = e_2 - \sigma(e_2, b_1) \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_2\| = \sqrt{\sigma(a_2, a_2)} = \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_2 = \frac{1}{\|a_2\|} \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie im dritten Schritt

$$a_3 = e_3 - \sigma(e_3, b_1) \cdot b_1 - \sigma(e_3, b_2) \cdot b_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\|a_3\| = \sqrt{\sigma(a_3, a_3)} = \sqrt{1} = 1$$

und damit

$$b_3 = \frac{1}{\|a_3\|} \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des durch die Matrix A_3 definierten Skalarprodukts.

20. Für die beiden symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A den Rang n hat und B positiv definit ist, wird die Bilinearform

$$\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \sigma(x, y) = x^\top \cdot M \cdot y, \quad \text{mit} \quad M = A \cdot B \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

betrachtet:

- Die Matrizen A und B sind symmetrisch, es gilt also $A^\top = A$ und $B^\top = B$, und damit ist wegen

$$M^\top = (A \cdot B \cdot A)^\top = A^\top \cdot B^\top \cdot A^\top = A \cdot B \cdot A = M$$

  auch die Matrix M symmetrisch; folglich ist die Bilinearform σ symmetrisch.
- Die Matrix B ist positiv definit, es gilt also $x^\top \cdot B \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bzw. $x^\top \cdot B \cdot x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\left(x^\top \cdot B \cdot x = 0 \Longrightarrow x = 0\right)$. Sei $y \in \mathbb{R}^n$, und mit $x = A \cdot y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$y^\top \cdot M \cdot y = y^\top \cdot (A \cdot B \cdot A) \cdot y \underset{A=A^\top}{=} \left(y^\top \cdot A^\top\right) \cdot B \cdot (A \cdot y) =$$
$$= (A \cdot y)^\top \cdot B \cdot (A \cdot y) = x^\top \cdot B \cdot x \geq 0;$$

  dabei folgt aus $y^\top \cdot M \cdot y = 0$, also $x^\top \cdot B \cdot x = 0$, schon $x = 0$, also $A \cdot y = 0$, und wegen $\mathrm{Rang}(A) = n$ ist A invertierbar, so daß sich $y = A^{-1} \cdot 0 = 0$ ergibt. Folglich ist die Matrix M und damit auch die Bilinearform σ positiv definit.

Damit ist σ eine symmetrische und positiv definite Bilinearform, also ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.