MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 4
10.05.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II" — Bearbeitungsvorschlag —

13. a) Es ist

$$\begin{aligned}\sigma_A(x,y) = x^\top A y &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + a_{13}\,y_3 \\ a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + a_{23}\,y_3 \\ a_{31}\,y_1 + a_{32}\,y_2 + a_{33}\,y_3 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}\,x_1\,y_1 + a_{12}\,x_1\,y_2 + a_{13}\,x_1\,y_3 \\ &\quad + a_{21}\,x_2\,y_1 + a_{22}\,x_2\,y_2 + a_{23}\,x_2\,y_3 \\ &\quad + a_{31}\,x_3\,y_1 + a_{32}\,x_3\,y_2 + a_{33}\,x_3\,y_3\end{aligned}$$

b) Gemäß a) ist der Koeffizient a_{ij} von $x_i\,y_j$ der Eintrag in der i–ten Zeile und j–ten Spalte der Matrix A; für die gegebenen Bilinearformen

- $\sigma_1(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3 - x_1\,y_3 - x_3\,y_1$,
- $\sigma_2(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + 3\,x_3\,y_3 + 4\,x_1\,y_2 + 5\,x_1\,y_3 + 6\,x_2\,y_3$,
- $\sigma_3(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - x_1\,y_2 + x_1\,y_3 - x_2\,y_3$,
- $\sigma_4(x,y) = x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 + x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_2\,y_3 + x_3\,y_2$

von $\mathbb{R}^3$ ergibt sich demnach

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Die Matrizen A_1 und A_4 sind (im Gegensatz zu den Matrizen A_2 und A_3) symmetrisch, so daß auch σ_1 und σ_4 (im Gegensatz zu σ_2 und σ_3) symmetrische Bilinearformen sind; wir untersuchen diese nun auf positive Definitheit mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums nach Hurwitz: wegen

$$\det(A_{1,1}) = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det(A_{1,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

sowie

$$\det(A_{1,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0$$

ist die Matrix A_1 positiv definit und folglich σ_1 ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$, und wegen

$$\det(A_{4,1}) = 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det(A_{4,2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

sowie

$$\det(A_{4,3}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (2+0+0) - (0+1+1) = 0$$

ist A_4 nicht positiv definit und folglich σ_4 auch kein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$.

14. a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & s \\ 2 & s & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

symmetrisch und folglich σ_A eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$. Nach dem Kriterium von Hurwitz ist A genau dann positiv definit, wenn die drei Hauptminoren

$$\det(A_1) = 2 \qquad \text{und} \qquad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

sowie

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & s \\ 2 & s & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (8+0+0) - (4+2\,s^2+0) = 4 - 2\,s^2$$

positiv sind, also genau für $s^2 < 2$. Damit ist σ_A genau dann ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$, wenn $s \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ gilt.

b) Für die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt

$$\sigma_A(e_i, e_j) = e_i^\top A e_j = a_{ij}$$

für alle $i,\ j \in \{1,2,3\}$; folglich ist

$$\begin{aligned} \|e_1\| &= \sqrt{\sigma_A(e_1,e_1)} = \sqrt{2}, \\ \|e_2\| &= \sqrt{\sigma_A(e_2,e_2)} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{und} \\ \|e_3\| &= \sqrt{\sigma_A(e_3,e_3)} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\cos\sphericalangle(e_1,e_2) &= \frac{\sigma_A(e_1,e_2)}{\|e_1\|\cdot\|e_2\|} = \frac{0}{\sqrt{2}\cdot 1} = 0,\\
\cos\sphericalangle(e_1,e_3) &= \frac{\sigma_A(e_1,e_3)}{\|e_1\|\cdot\|e_3\|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{und}\\
\cos\sphericalangle(e_2,e_3) &= \frac{\sigma_A(e_2,e_3)}{\|e_2\|\cdot\|e_3\|} = \frac{-1}{1\cdot 2} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

also

$$\sphericalangle(e_1,e_2) = \frac{\pi}{2} \text{ (bzw. } 90^\circ), \qquad \sphericalangle(e_1,e_3) = \frac{\pi}{4} \text{ (bzw. } 45^\circ)$$

und

$$\sphericalangle(e_2,e_3) = \frac{2\pi}{3} \text{ (bzw. } 120^\circ).$$

c) Für einen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
e_1 \perp v \iff \sigma_A(e_1,v) = 0 \iff e_1^\top A v = 0 \iff \\
\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2\,v_1 + 2\,v_3 = 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
e_3 \perp v \iff \sigma_A(e_3,v) = 0 \iff e_3^\top A v = 0 \iff \\
\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 2\,v_1 + v_2 + 4\,v_3 = 0,
\end{aligned}$$

so daß die gesuchten Vektoren genau die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{2}}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sind; damit ist etwa $v = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

15. a) Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=}$$

$$= \left(\left(1^3 + s \cdot s \cdot s^2 + s^2 \cdot s \cdot s\right) - \left(s^2 \cdot 1 \cdot s^2 + 1 \cdot s \cdot s + s \cdot s \cdot 1\right)\right) =$$

$$= \left(1 + s^4 + s^4\right) - \left(s^4 + s^2 + s^2\right) = 1 - 2\,s^2 + s^4 = \left(1 - s^2\right)^2.$$

b) Die Matrix M_s ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M) \neq 0$ ist; dies ist wegen

$$\det(M) = 0 \iff \left(1 - s^2\right)^2 = 0 \iff s^2 = 1 \iff s = \pm 1$$

genau für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ der Fall. Für alle $s \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die zu M_s komplementäre Matrix

$$\widetilde{M_s} = \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31} \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - s^2 & -s(1 - s^2) & 0 \\ -s(1 - s^2) & 1 - s^4 & -s(1 - s^2) \\ 0 & -s(1 - s^2) & 1 - s^2 \end{pmatrix},$$

so daß wir für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ die zu M_s inverse Matrix

$$M_s^{-1} = \frac{1}{\det(M_s)} \cdot \widetilde{M_s} =$$

$$= \frac{1}{(1 - s^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 - s^2 & -s(1 - s^2) & 0 \\ -s(1 - s^2) & 1 - s^4 & -s(1 - s^2) \\ 0 & -s(1 - s^2) & 1 - s^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1 - s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ -s & 1 + s^2 & -s \\ 0 & -s & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten.

c) Nach dem Kriterium von Hurwitz ist die symmetrische Matrix M_s genau dann positiv definit, wenn ihre drei Hauptminoren

$$\det(1) = 1 \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} = 1 - s^2$$

sowie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ s^2 & s & 1 \end{pmatrix} = (1 - s^2)^2$$

positiv sind; dies ist aber genau im Falle $1 - s^2 > 0$, also für $s \in \left]-1; 1\right[$.

16. a) Es ist

$$\cos \sphericalangle(\lambda\, v, \mu\, w) = \frac{\sigma(\lambda\, v, \mu\, w)}{\|\lambda\, v\| \cdot \|\mu\, w\|} = \frac{\lambda\, \mu\, \sigma(v, w)}{|\lambda| \cdot |\mu| \cdot \|v\| \cdot \|w\|} = \frac{\lambda\, \mu}{|\lambda\, \mu|}\, \cos \sphericalangle(v, w).$$

Dies legt die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Für $\lambda\, \mu > 0$ ist
$$\cos \sphericalangle(\lambda\, v, \mu\, w) = \cos \sphericalangle(v, w),$$
also
$$\sphericalangle(\lambda\, v, \mu\, w) = \sphericalangle(v, w);$$
im Falle λ, $\mu > 0$ handelt es sich um dieselben Winkel, im Falle λ, $\mu < 0$ um (gleich große) Scheitelwinkel.
- Für $\lambda\, \mu < 0$ ist
$$\cos \sphericalangle(\lambda\, v, \mu\, w) = -\cos \sphericalangle(v, w),$$
also
$$\sphericalangle(\lambda\, v, \mu\, w) = \pi - \sphericalangle(v, w);$$
in diesem Fall handelt es sich um Nebenwinkel, die sich zu 180° ergänzen.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \|v \pm w\|^2 = \sigma(v \pm w, v \pm w) &= \sigma(v, v \pm w) \pm \sigma(w, v \pm w) = \\ &= (\sigma(v, v) \pm \sigma(v, w)) \pm (\sigma(w, v) \pm \sigma(w, w)) = \\ &= \sigma(v, v) \pm 2\, \sigma(v, w) + \sigma(w, w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm 2\, \|v\|\, \|w\| \cos \varphi. \end{aligned}$$

c) Unter Verwendung von b) ergibt sich

$$v \perp w \iff \sigma(v, w) = 0 \iff \cos \varphi = 0 \iff \|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$