MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 3
03.05.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

9. a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_2) = \begin{vmatrix} (2-a)-\lambda & a \\ -a & (2+a)-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} (2-\lambda)-a & a \\ -a & (2-\lambda)+a \end{vmatrix} = \big((2-\lambda)-a\big)\cdot\big((2-\lambda)+a\big) - a\cdot(-a) =$$
$$= \big((2-\lambda)^2 - a^2\big) - (-a^2) = (2-\lambda)^2 - a^2 + a^2 = (2-\lambda)^2;$$

damit besitzt A nur einen Eigenwert, nämlich $\lambda_0 = 2$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_0 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_0 E_2 = \begin{pmatrix} (2-a)-2 & a \\ -a & (2+a)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ -a & a \end{pmatrix} \overset{\text{II}-\text{I}}{\leadsto} \begin{pmatrix} -a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt dieser die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_0 = 2 - \operatorname{Rang}(A - \lambda_0 E_2) = \begin{cases} 2-1=1, & \text{falls } a \neq 0, \\ 2-0=2, & \text{falls } a = 0. \end{cases}$$

Nach dem Hauptsatz über diagonalisierbare Matrizen ist nun A genau dann diagonalisierbar, wenn $\alpha_0 = \gamma_0$ gilt, also im Falle $a = 0$.

10. a) Es ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & s \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=} (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & s \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (2-\lambda)\cdot\big(\lambda^2 - s\big) = -\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + s\,\lambda - 2\,s$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit ist $\chi_A = -X^3 + 2\,X^2 + s\,X - 2\,s$ das charakteristische Polynom von A. Da die Eigenwerte von A genau die Nullstellen von χ_A sind, legt die faktorisierte Darstellung $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)\cdot(\lambda^2 - s)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Fallunterscheidung nahe:

- Für $s < 0$ ist q mit $q(\lambda) = \lambda^2 - s > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion ohne (reelle) Nullstellen; damit ist $\lambda_1 = 2$ der einzige Eigenwert von A.

- Für $s = 0$ ist $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)\,\lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 0$.
- Für $s > 0$ schließlich ist $\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 2)\,(\lambda - \sqrt{s})\,(\lambda + \sqrt{s})$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A im Falle $s \neq 4$ die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{s}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{s}$ sowie im Falle $s = 4$ die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2$.

b) Gemäß a) treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $s < 0$ zerfällt das charakteristische Polynom χ_A nicht in Linearfaktoren; damit ist A nicht diagonalisierbar.
- Für $s = 0$ besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit $\alpha_1 = 1$ (und damit auch $\gamma_1 = 1$) sowie $\lambda_2 = 0$ mit $\alpha_2 = 2$; wegen

$$A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $\operatorname{Rang}(A - \lambda_2 E_3) = 2$ und damit $\gamma_2 = 1$. Damit ist A für $s = 0$ nicht diagonalisierbar.
- Für $0 < s \neq 4$ besitzt A drei verschiedene Eigenwerte und ist daher als 3×3–Matrix diagonalisierbar.
- Für $s = 4$ schließlich besitzt A die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit $\alpha_1 = 2$ sowie $\lambda_2 = -2$ mit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch $\gamma_2 = 1$); wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ist $\operatorname{Rang}(A - \lambda_1 E_3) = 1$ und damit $\gamma_1 = 2$. Damit ist A für $s = 4$ diagonalisierbar.

Zusammenfassend ist also A genau dann zu einer reellen Diagonalmatrix ähnlich, wenn $s > 0$ ist.

11. a) Der gegebene Endomorphismus $f : V \to V$ des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt wegen

$$f(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4$$

$$f(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

$$f(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 1 \cdot A_4$$

bezüglich der Basis A_1, A_2, A_3, A_4 von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Wegen

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks–}}{=}} (1-\lambda)^4$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt genau einen Eigenwert, nämlich $\lambda_1 = 1$ der algebraischen Vielfachheit $\alpha_1 = 4$, und wegen

$$M - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich für die geometrische Vielfachheit

$$\gamma_1 = 4 - \operatorname{Rang}(M - \lambda_1\, E_4) = 4 - 2 = 2.$$

Wegen $\gamma_1 < \alpha_1$ ist die darstellende Matrix M und folglich auch der Endomorphismus f nicht diagonalisierbar.

12. a) Die Aussage ist richtig: ist nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt $\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$; damit ist aber auch $\det\left((A - \lambda \cdot E_n)^\top\right) = 0$. Wegen

$$(A - \lambda \cdot E_n)^\top = A^\top - (\lambda \cdot E_n)^\top = A^\top - \lambda \cdot E_n$$

folgt daraus $\det(A^\top - \lambda \cdot E_n) = 0$, somit ist λ auch ein Eigenwert von $A^\top$.

b) Die Aussage ist falsch: als Gegenbeispiel betrachten wir etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

es ist zwar $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \cdot x$$

ein Eigenvektor von A, wegen

$$A^\top \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R} \cdot x$$

aber kein Eigenvektor von $A^\top$.

c) Die Aussage ist richtig: ist nämlich A diagonalisierbar, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $D = P^{-1}AP$; damit ergibt sich aber

$$D^\top = \left(P^{-1}AP\right)^\top = P^\top A^\top \left(P^{-1}\right)^\top$$

mit

$$D^\top = D \qquad \text{und} \qquad P^\top \left(P^{-1}\right)^\top = \left(P^{-1}P\right)^\top = E_n^\top = E_n.$$

Folglich ist die Matrix $Q = \left(P^{-1}\right)^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ invertierbar mit $Q^{-1} = P^\top$, und wir erhalten

$$D = D^\top = P^\top A^\top \left(P^{-1}\right)^\top = Q^{-1}A^\top Q;$$

somit ist auch $A^\top$ diagonalisierbar.