

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Zeile}}{=} \\ &= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\text{1. Spalte}}{=} \\ &= (1-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 \cdot (2-\lambda);\end{aligned}$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt A genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Wegen

$$A - \lambda_1 E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_1)$ von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$A - \lambda_2 E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des Eigenraums $\text{Eig}(A; \lambda_2)$ von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$;

damit bilden v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

gilt dann $P^{-1}AP = D$.

6. Es ist

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a & b \\ 0 & 1 - \lambda & c \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; damit besitzt A die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit $\alpha_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$ mit $\alpha_2 = 1$ (und damit auch $\gamma_2 = 1$). Wegen

$$A - \lambda_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\text{Rang}(A - \lambda_1 E_3) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 0, \\ 2, & \text{falls } a \neq 0; \end{cases}$$

A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\gamma_1 = 2$, also $\text{Rang}(A - \lambda_1 E_3) = 1$ gilt,

also für $a = 0$. In diesem Falle ist etwa $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von

$\text{Eig}(A; \lambda_1)$, und wegen $A - \lambda_2 E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $v_3 = \begin{pmatrix} -b \\ -c \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von

$\text{Eig}(A; \lambda_2)$. Mit

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

gilt dann

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. a) Wegen

$$f(e_1) = 2 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \quad \text{und} \quad f(e_2) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix von f bezüglich e_1, e_2 . Es ist

$$g(e_1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

und wegen $e_2 = e_1 - (e_1 - e_2)$ ergibt sich

$$g(e_2) = g(e_1) - g(e_1 - e_2) = e_1 - c \cdot (e_1 - e_2) = (1 - c) \cdot e_1 + c \cdot e_2;$$

damit ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 - c \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix von g bezüglich e_1, e_2 . Des weiteren ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 - c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 - 2c \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

die darstellende Matrix von $f \circ g$ bezüglich e_1, e_2 .

b) Es ist $f \circ g = \ell_{A \cdot B}$ genau dann diagonalisierbar wenn die Matrix $A \cdot B$ diagonalisierbar ist. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \chi_{A \cdot B}(\lambda) &= \det(A \cdot B - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 - 2c \\ 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2 - \lambda)(c - \lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - c); \end{aligned}$$

dies motiviert die folgende Fallunterscheidung:

- Für $c \neq 2$ besitzt $A \cdot B$ die beiden verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = c$; damit ist $A \cdot B$ bzw. $f \circ g$ diagonalisierbar.
- Für $c = 2$ ist $\chi_{A \cdot B}(x) = (\lambda - 2)^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt $A \cdot B$ den einzigen Eigenwert $\lambda = 2$ mit $\alpha = 2$, und wegen

$$A \cdot B - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\text{Rang}(A \cdot B - \lambda E_2) = 1$ und folglich $\gamma = 1$. Somit ist $A \cdot B$ bzw. $f \circ g$ nicht diagonalisierbar.

8. a) Es ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert der Matrix A , wenn $\lambda = 0$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$ ist, also für $\det(A) = 0$. Folglich ist $\lambda = 0$ genau dann kein Eigenwert von A , wenn $\det(A) \neq 0$ gilt, was jedoch zur Invertierbarkeit von A gleichwertig ist.

- b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gibt es einen Eigenvektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = \lambda x$; damit ergibt sich

$$A^2 x = (A A) x = A (Ax) = A (\lambda x) \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda (Ax) = \lambda (\lambda x) = \lambda^2 x,$$

so daß $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^2 zum Eigenwert λ^2 ist. Ist zudem A invertierbar, so ist gemäß a) der Eigenwert $\lambda \neq 0$, und wir erhalten

$$x = E_n x = (A^{-1} A) x = A^{-1} (Ax) = A^{-1} (\lambda x) \underset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda (A^{-1} x),$$

wegen $\lambda \neq 0$ also

$$A^{-1} x = \lambda^{-1} x;$$

damit ist $x \neq 0$ auch ein Eigenvektor der Matrix A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1} .

- c) Der Nachweis, daß mit der Matrix A auch ihr Quadrat A^2 reell diagonalisierbar ist, läßt sich etwa durch eine der folgenden Überlegungen erbringen:

- Ist A reell diagonalisierbar, so gibt es eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A ; seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Gemäß b) sind $b_1, \dots, b_n$ auch Eigenvektoren von A^2 zu den Eigenwerten $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$, es ist also $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A^2 ; damit ist A^2 reell diagonalisierbar.
- Ist A reell diagonalisierbar, also ähnlich zu einer reellen Diagonalmatrix, so gibt es eine invertierbare Matrix $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $D = P^{-1}AP$. Damit gilt

$$D^2 = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{=E_n} AP = P^{-1}A^2P,$$

so daß A^2 ähnlich zur Diagonalmatrix $D^2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist; folglich ist A^2 reell diagonalisierbar.

- d) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzt wegen

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ keinen reellen Eigenwert, ist also insbesondere nicht reell diagonalisierbar; dagegen ist ihr Quadrat

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

bereits eine Diagonalmatrix, insbesondere also reell diagonalisierbar.