MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 1
19.04.2016

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Es ist $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq 0$ und

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 5 & -11 & 7 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot x;$$

damit ist x ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert $\lambda_x = 12$.

b) Für $\lambda = 4$ gilt

$$A - \lambda\, E_3 = \begin{pmatrix} 5-4 & -11 & 7 \\ -2 & 2-4 & 2 \\ 3 & -9 & 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 7 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{I}}{\underset{\mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -11 & 7 \\ 0 & -24 & 16 \\ 0 & 24 & -16 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\underset{\mathrm{II}\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -11 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda\, E_3) = 2 < 3;$$

damit ist $\lambda = 4$ ein Eigenwert der Matrix A mit dem Eigenraum

$$\operatorname{Eig}(A; 4) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. • Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)\,(3-\lambda) - (-4) = \lambda^2 - 4\,\lambda + 7 = (\lambda-2)^2 + 3 > 0;$$

damit besitzt χ_A keine Nullstelle und folglich A keinen Eigenwert.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) \quad &= \quad \det(B - \lambda\, E_3) \;=\; \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -2 \\ 8 & -2-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{II}-4\cdot\text{III}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{III}}{=}} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -4+2\,\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -8+4\,\lambda \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{(2-\lambda)\text{ aus II}}{\overset{(2-\lambda)\text{ aus I}}{=}} (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} (2-\lambda)^2 \cdot [(1-\lambda) - (-4+4)] = -(\lambda-2)^2\,(\lambda-1);
\end{aligned}$$

damit besitzt B die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Wegen

$$B - \lambda_1\, E_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-4\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(B; \lambda_1)$, und wegen

$$B - \lambda_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 8 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\frac{2}{5}\text{I}}{\overset{\text{II}-\frac{8}{5}\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \underset{\text{II}\cdot 5}{\overset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\operatorname{Eig}(B; \lambda_2)$.

- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\chi_C(\lambda) \quad &= \quad \det(C - \lambda\, E_4) \;=\; \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8-\lambda & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{2. Zeile}}{=} (9-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{III}+2\cdot\text{II}}{\overset{\text{I}-2\cdot\text{II}}{=}} (9-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 9-\lambda & -18+2\,\lambda & 0 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 18-2\,\lambda & 9-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{(9-\lambda)\text{ aus III}}{\overset{(9-\lambda)\text{ aus I}}{=}} (9-\lambda)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (9-\lambda)^3 \cdot [(8-\lambda) - (4+4)] = \lambda\,(\lambda-9)^3;
\end{aligned}$$

damit besitzt C die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 9$. Wegen

$$C - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\frac{1}{9}\cdot\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{III}-5\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{9}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 9 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{IV}-9\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+2\mathrm{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(C; \lambda_1)$, und wegen

$$C - \lambda_2\, E_4 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(C; \lambda_2)$.

3. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{1.\ \text{Zeile}}{=}$$

$$= (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \big[(1-\lambda)^2 - 1^2\big] =$$

$$= (1-\lambda) \cdot \big[-\lambda \cdot (2-\lambda)\big] = -\lambda\,(1-\lambda)\,(2-\lambda);$$

wegen

$$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = 2$$

besitzt A genau die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$ und ist damit als 3×3–Matrix diagonalisierbar. Wegen

$$A - \lambda_1\, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$, wegen

$$A - \lambda_2\, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$A - \lambda_3 E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$.

Damit ist v_1, v_2, v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix A zu den Eigenwerten λ_1, λ_2, λ_3, so daß sich mit der invertierbaren Matrix

$$P = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

und der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Beziehung $D = P^{-1} A P$ ergibt.

4. Der gegebene Endomorphismus $f : V \to V$ des Vektorraums V besitzt wegen

$$\begin{array}{ccccccccccc} f(v_1) & = & v_2 & = & 0\cdot v_1 & + & 1\cdot v_2 & + & 0\cdot v_3 & + & 0\cdot v_4 \\ f(v_2) & = & v_3 & = & 0\cdot v_1 & + & 0\cdot v_2 & + & 1\cdot v_3 & + & 0\cdot v_4 \\ f(v_3) & = & v_4 & = & 0\cdot v_1 & + & 0\cdot v_2 & + & 0\cdot v_3 & + & 1\cdot v_4 \\ f(v_4) & = & v_1 & = & 1\cdot v_1 & + & 0\cdot v_2 & + & 0\cdot v_3 & + & 0\cdot v_4 \end{array}$$

bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von V die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4};$$

dabei ist ein Vektor

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \alpha_3 \cdot v_3 + \alpha_4 \cdot v_4 \in V$$

genau dann ein Eigenvektor des Endomorphismus f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn sein Koordinatenvektor

$$p(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 ein Eigenvektor der darstellenden Matrix M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda\, E_4) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{=} \\
&= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrizen}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} \\
&= (-\lambda) \cdot (-\lambda)^3 - 1 \cdot 1^3 = \lambda^4 - 1 = (\lambda - 1)\,(\lambda + 1)\left(\lambda^2 + 1\right)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt M genau zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$; wegen

$$\begin{aligned}
M - \lambda_1\, E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\underset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV+III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p\,(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(M; \lambda_1)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$, und wegen

$$\begin{aligned}
M - \lambda_2\, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist der Koordinatenvektor

$$p\,(b_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

eine Basis für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(M;\lambda_2)$ der Matrix M zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

Folglich besitzt auch der Endomorphismus $f : V \to V$ genau die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, und für die beiden Eigenräume ergibt sich

$$\mathrm{Eig}(f;\lambda_1) = \mathbb{R}\cdot b_1 \qquad \text{mit der Basis} \qquad b_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

und

$$\mathrm{Eig}(f;\lambda_2) = \mathbb{R}\cdot b_2 \qquad \text{mit der Basis} \qquad b_2 = -v_1 + v_2 - v_3 + v_4.$$

Damit gibt es nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren von f, insbesondere also keine Basis des 4–dimensionalen Vektorraums V aus Eigenvektoren von f; damit ist f nicht diagonalisierbar.