

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

33. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011*). Sei $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene

$$E = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Man berechne die reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\sigma(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

34. Im euklidischen \mathbb{R}^4 mit dem Standardskalarprodukt \circ werde der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

erzeugte Untervektorraum $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ betrachtet.

- Man bestimme für U und U^\perp jeweils eine Orthonormalbasis.
 - Man berechne die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ für die Spiegelung an U .
35. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2014*). Gegeben seien die Matrizen

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Man zeige, daß ℓ_S eine Spiegelung beschreibt, und berechne die Spiegelebene.
 - Man bestimme die Eigenwerte der Matrix $A = SDS$.
36. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*). Gegeben seien

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad F = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Man betrachte $\varphi = \sigma \circ \delta$, wobei $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Ebene

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und $\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der Geraden $g = \mathbb{R} \cdot v \subseteq \mathbb{R}^3$ beschreibt.

- Man zeige, daß $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Abbildungsmatrix F besitzt.
- Man zeige, daß φ die Spiegelung an einer Ebene ist, und gebe eine Gleichung für die Spiegelungsebene von φ an.

Abgabe bis Mittwoch, den 22. Juni 2016, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).