

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

25. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010). Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man zeige, daß v_1 ein Eigenvektor von A ist, und bestimme alle Eigenwerte von A sowie eine orthogonale Matrix $P \in O_3(\mathbb{R})$, so daß $P^T A P$ Diagonalgestalt hat.

26. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- Man zeige, daß -1 ein Eigenwert von A ist, und bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume von A .
- Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in O_3(\mathbb{R})$, so daß $P^T A P$ Diagonalgestalt besitzt.
- Man finde eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $A = B^3$.

27. (Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).

- Für $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $S \in GL_n(\mathbb{R})$ zeige man die Gültigkeit der Beziehung

$$SM^2S^{-1} = (SMS^{-1})^2.$$

- Für eine diagonalisierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit nur nicht-negativen Eigenwerten zeige man, daß eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit $A^2 = B$.
- Man bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

28. Man betrachte die durch $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ sowie $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$ rekursiv definierte Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

- Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} = F^n \quad \text{mit} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in O_2(\mathbb{R})$, so daß $P^T F P$ eine Diagonalgestalt besitzt.
- Man finde mit Hilfe von a) und b) eine explizite Darstellung der Fibonaccizahlen f_n mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe bis Mittwoch, den 8. Juni 2016, 10⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).