Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

21. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Die lineare Hülle W der Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

ist ein Unterraum des euklidischen $(\mathbb{R}^4, \circ)$. Man berechne eine Orthonormalbasis von W und bestimme damit die Abbildungsmatrix der Orthogonalprojektion $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf den Unterraum W.

22. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Man zeige, daß A nur die Eigenwerte ± 2 besitzt.

b) Man bestimme eine orthogonale Matrix P, die die Matrix A diagonalisiert.

23. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).*

a) Man ergänze den Vektor $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Basis u_1, u_2, u_3 des $\mathbb{R}^3$ aus (bezüglich des Standardskalarprodukts) paarweise orthogonalen Vektoren.

b) Man zeige, daß es genau eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gibt, die u_1 als Eigenvektor zum Eigenwert 1 und u_2, u_3 als Eigenvektoren zum Eigenwert -2 besitzt.

c) Man gebe die Matrix U aus b) explizit an.

24. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Man berechne die Eigenwerte von A und eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, \circ)$ aus Eigenvektoren von A.

b) Man bestimme eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D.$$

c) Man folgere aus b), daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}.$$

d) Man zeige mit c)

$$A^n = 5^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 2^{n+2}+1 & 2^{n+1}-2 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n+4 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Abgabe bis Mittwoch, 1. Juni 2016, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).