MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 5
18.05.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

17. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sowie der von v_1, v_2 und v_3 aufgespannte Unterraum $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ gegeben.

a) Man zeige, daß v_1, v_2 eine Basis von U ist, und stelle v_3 als Linearkombination von v_1 und v_2 dar.

b) Man ergänze v_1, v_2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

c) Man bestimme (bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$) eine Orthonormalbasis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U.

18. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei durch

$$\sigma(x,y) = x_1\,y_1 + 3\,x_2\,y_2 + 4\,x_3\,y_3 + x_1\,y_2 + x_2\,y_1 + x_1\,y_3 + x_3\,y_1 + x_2\,y_3 + x_3\,y_2$$

für x, $y \in \mathbb{R}^3$ eine Bilinearform $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben.

a) Man zeige, daß σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Man konstruiere im euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \sigma)$ eine Orthonormalbasis für den Unterraum $U = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

19. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) Man zeige, daß σ_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Man bestimme bezüglich σ_A die Längen der Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 sowie die von ihnen eingeschlossenen Winkel.

c) Man berechne eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \sigma_A)$.

d) Man gebe eine Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $A = P^\top P$ an.

20. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2009).* Sei (V, σ) ein euklidischer Vektorraum. Für Untervektorräume U, $W \subseteq V$ zeige man:

a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

b) $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$.

Abgabe bis Mittwoch, den 25. Mai 2016, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).