MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 4
11.05.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

13. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Man zeige, daß durch $\sigma_B(x,y) = x^\top \cdot B \cdot y$ für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt σ_B auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

   b) Man berechne den Winkel, den die beiden Vektoren e_1 und $e_2 \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts σ_B einschließen.

14. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Man zeige, daß es auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gibt, bezüglich dem die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   eine Orthonormalbasis bilden, und gebe $\sigma(x,y)$ für $x,\, y \in \mathbb{R}^2$ explizit an.

15. Für den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachte man die durch

$$\sigma(A,B) = \mathrm{Spur}(A\,B) \qquad \text{und} \qquad \tau(A,B) = \mathrm{Spur}(A^\top B) \qquad \text{für } A,\, B \in V$$

   definierten Abbildungen $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$ und $\tau : V \times V \to \mathbb{R}$.

   a) Man zeige, daß σ und τ symmetrische Bilinearformen auf V sind.

   b) Man überprüfe, ob σ und τ Skalarprodukte auf V sind.

16. Sei (V,σ) ein euklidischer Vektorraum. Man zeige für alle $v,\, w \in V$:

   a) $\sigma(v,w) = \frac{1}{4}\,\|v+w\|^2 - \frac{1}{4}\,\|v-w\|^2$

   b) $2\,(\|v\|^2 + \|w\|^2) = \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2$ *(Parallelogrammgleichung)*

   c) $v \perp w \iff \|v+w\| = \|v-w\|$

   d) $\|v+w\| = \|v\| + \|w\| \iff w = 0$ oder $v = \lambda\, w$ für ein $\lambda \geq 0$

Abgabe bis Mittwoch, den 18. Mai 2016, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).