MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2016
Blatt 2
27.04.2016

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II“

5. a) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Man bestimme das charakteristische Polynom der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und entscheide, ob M diagonalisierbar ist.

b) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013).* Man zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -18 & 8 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

diagonalisierbar ist, und bestimme eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

6. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Man zeige, daß die Zahlen 1 und -1 Eigenwerte der Matrix A sind, und bestimme die geometrischen Vielfachheiten dieser Eigenwerte.

b) Man berechne das charakteristische Polynom von A.

c) Man entscheide, ob A diagonalisierbar ist.

7. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

sind Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Man berechne eine mögliche Matrix A.

8. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013).* Für fest gewählte Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto AX - XB.$$

Man zeige:

a) Ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $B^\top$ zum Eigenwert μ, so ist

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} = x \cdot y^\top$$

ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda - \mu$.

b) Haben A und B einen gemeinsamen Eigenwert, so gibt es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \{0\}$ mit $AC = CB$.

Abgabe bis Mittwoch, den 4. Mai 2016, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).