MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 14
03.02.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

53. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sowie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

a) Man zeige, daß b_1, b_2, b_3 bzw. c_1, c_2 Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Für die lineare Abbildung $\ell_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Abbildungsmatrix A gebe man die darstellende Matrix bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2 an.

c) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ werde bezüglich der Basen b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2 durch die Matrix A dargestellt. Man bestimme die Abbildungsmatrix $A' \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f = \ell_{A'}$.

54. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2016).* Gegeben ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+c & 2\,b & 0 \\ 0 & b+4\,c & 5\,d \end{pmatrix}.$$

a) Man zeige, daß f linear ist.

b) Man wähle eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 3}$ und bestimme die darstellende Matrix F von f bezüglich dieser gewählten Basen.

c) Man zeige, daß f injektiv ist.

55. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).* Es sei V ein reeller Vektorraum mit der Basis b_1, b_2, b_3, b_4; ferner sei der Endomorphismus $f : V \to V$ durch

$$f(b_1) = 0, \quad f(b_2) = 2\,b_2, \quad f(b_3) = b_4, \quad f(b_4) = 6\,b_2 - b_4$$

gegeben. Man ermittle eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Ist f injektiv bzw. surjektiv?

56. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2000).* Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume. Man beweise:

a) Wenn es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, die nicht surjektiv ist, so gilt $\dim(V) < \dim(W)$.

b) Wenn es keine injektive lineare Abbildung von V nach W gibt, so gilt $\dim(V) > \dim(W)$.