MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 13
27.01.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

49. Man betrachte die Vektoren v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie w_1, w_2, $w_3 \in \mathbb{R}^2$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, daß es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3$$

gibt, und bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

50. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008).* In Abhängigkeit von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

gegeben. Die zugehörige lineare Abbildung sei

$$f_s : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f_s(x) = A_s \cdot x.$$

a) Man bestimme alle Parameter $s \in \mathbb{R}$, für welche die lineare Abbildung f_s surjektiv ist, und berechne hierfür Kern (f_s).

b) Nun sei $s = 0$ gewählt. Man bestimme eine Basis des Kerns und eine Basis des Bildraums von f_0.

51. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Für die fest gewählte Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

betrachte man die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(A) = A \cdot M - M \cdot A.$$

Man zeige, daß f eine lineare Abbildung ist, und bestimme für Kern(f) und Bild(f) jeweils eine Basis und die Dimension.

52. Es seien V und W reelle Vektorräume sowie $f : V \to W$ eine lineare Abbildung; ferner seien U ein Unterraum von V und X ein Unterraum von W. Man zeige:

a) $f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}$ ist ein Unterraum von W.

b) $f^{-1}(X) = \{v \in V \mid f(v) \in X\}$ ist ein Unterraum von V.

c) f ist genau dann surjektiv, wenn Bild$(f) = W$ ist.

d) f ist genau dann injektiv, wenn Kern$(f) = \{0_V\}$ ist.