MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 12
20.01.2020

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

45. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2018).* In Abhängigkeit von den reellen Parametern s, $t \in \mathbb{R}$ sind

$$A_{s,t} = \begin{pmatrix} 0 & s & s+t \\ t & 0 & t \\ s+t & s & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben; ferner bezeichne $L_{s,t} \subseteq \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A_{s,t} \cdot x = b$.

   a) Man bestimme $\det(A_{s,t})$ und $\operatorname{Rang}(A_{s,t})$ in Abhängigkeit von s und t.
   b) Man bestimme $\dim(L_{s,t})$ in Abhängigkeit von s und t.

46. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2003).* Gegeben sei das von den Parametern r, s, $t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & 2\,x_4 & = & 4 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & + & r\,x_3 & & & = & 1 \\ s\,x_1 & & & + & x_3 & + & t\,x_4 & = & 1 \end{array}$$

   a) Für welche Wahl der Parameter ist die Lösungsmenge eindimensional?
   b) Für welche Wahl der Parameter ist die Lösungsmenge zweidimensional? Man löse das lineare Gleichungssystem für diese Wahl der Parameter.

47. Unter der *Spur* einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ versteht man die Summe ihrer Diagonalelemente, es ist also $\operatorname{Spur}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$. Man zeige:

   a) $\operatorname{Spur} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.
   b) Für alle A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.
   c) Es gibt A, B, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\operatorname{Spur}(ABC) \neq \operatorname{Spur}(BAC)$.
   d) Gibt es Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A\,B - B\,A = \lambda E_n$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $\lambda = 0$.

48. *(Klausurteilaufgaben Wintersemester 2011/12).* Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zeige man:

   a) $\ell_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv $\iff$ $\ell_{A^\top} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ injektiv.
   b) $A^\top A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar $\implies$ $\operatorname{Rang}(A) = n$.