Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

41. Für die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ bestimme man jeweils den Rang von A und B sowie von $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

42. In Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachte man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

a) Man bestimme den Rang von A sowie eine Basis für den Lösungsraum L_0 des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

b) Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das inhomogene Gleichungssystem $A \cdot x = b$ lösbar? Man bestimme hierfür auch eine partikuläre Lösung x_p.

c) Man gebe in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge L des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ an.

43. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* In Abhängigkeit von den beiden Parametern α, $\beta \in \mathbb{R}$ betrachte man das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3+\beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Man untersuche, wann dieses Gleichungssystem lösbar ist, und bestimme in diesem Fall die Dimension d des Lösungsraumes.

b) Man ermittle in den beiden Fällen $\alpha = \beta = 0$ und $\alpha = \beta = 1$ jeweils explizit alle reellen Lösungen dieses linearen Gleichungssystems.

44. Man entscheide, für welche $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Beziehung

$$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B) = r \implies \mathrm{Rang}(A\,B) = r$$

für alle A, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gültig ist, und begründe die Entscheidung.