MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 9
16.12.2019

# Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

33. Im $\mathbb{R}^4$ sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

    a) Man zeige, daß $v_1, v_2, v_3, v_4$ linear abhängig sind, und gebe alle Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination von $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ an.

    b) Man wähle aus $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ eine Basis von $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ aus.

    c) Mit welchen Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$ kann die in b) ermittelte Basis von $V$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ zu ergänzt werden?

34. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).* Sei $V$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$ eine Basis von $V$. Für die reellen Zahlen $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$ betrachte man die Vektoren $v_1 = b_1 + \beta_1 \cdot b_3$, $v_2 = b_2 + \beta_2 \cdot b_4$, $v_3 = \beta_3 \cdot b_1 + b_3$ und $v_4 = \beta_4 \cdot b_2 + b_4$. Man zeige, daß $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$ genau dann eine Basis von $V$ ist, wenn $(1 - \beta_1 \beta_3)(1 - \beta_2 \beta_4) \neq 0$ gilt.

35. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ seien

$$u_1 = X^3 + X^2, \qquad u_2 = X^2 + X, \qquad u_3 = X + 1$$

$$w_1 = X^3 - X^2 + X, \qquad w_2 = X^2 - X + 1$$

    sowie die Unterräume $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ gegeben. Man bestimme eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

36. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002).* Es seien $a$, $b$, $c$ und $d$ linear unabhängige Vektoren in einem reellen Vektorraum. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = a + b + c + d, \quad v_2 = b + c, \quad v_3 = c + d, \quad v_4 = a + b$$

    aufgespannten Unterraums.