MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 6
25.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

21. Für $t \in \mathbb{R}$ seien $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+t^2 \\ 0 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ gegeben.

    a) Man zeige, daß A für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar ist.

    b) Man bestimme die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ von A.

    c) Man löse das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ sowohl mittels der inversen Matrix A^{-1} als auch mit Hilfe der Cramerschen Regel.

22. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002).* Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. Man zeige die Äquivalenz der beiden folgenden Eigenschaften:

    a) A ist invertierbar, und alle Koeffizienten von A^{-1} sind wieder ganze Zahlen.

    b) Es ist $\det(A) = \pm 1$.

23. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum sowie $u, v \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Man zeige:

    a) Man berechne $\lambda \cdot ((u-v)+v)$ auf zwei verschiedene Arten und zeige damit $\lambda \cdot (u-v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$; analog beweise man $(\lambda - \mu) \cdot v = \lambda \cdot v - \mu \cdot v$.

    b) Man berechne $\lambda \cdot (0_V + 0_V)$ auf zwei verschiedene Arten und zeige damit $\lambda \cdot 0_V = 0_V$; analog beweise man $0 \cdot v = 0_V$.

    c) Man folgere $(-\lambda) \cdot v = -\lambda \cdot v = \lambda \cdot (-v)$ aus a) und b).

    d) Man zeige: $\lambda \cdot v = 0_V \iff \lambda = 0$ oder $v = 0_V$.

24. Man untersuche, bei welchen der folgenden Teilmengen es sich um Unterräume von $\mathbb{R}^3$ handelt:

    a) $U_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

    b) $U_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \in \mathbb{Z}\}$

    c) $U_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2\,x_2 = 3\,x_3\}$

    d) $U_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = x_2 \cdot x_3\}$