Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

17. Man bestimme jeweils alle $s,\, t \in \mathbb{R}$, für die die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} s & 0 & t & 0 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \\ -t & 0 & s & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \text{bzw.} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2\,t \\ 2\,t & 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 & -s \\ s & 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar sind.

18. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).* Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}$ die Matrix

$$A_n = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \text{mit} \qquad a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{für } i = j, \\ 1, & \text{für } i = j+1, \\ 1, & \text{für } i = j-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Man ermittle $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.
b) Man drücke $\det(A_n)$ für $n \geq 3$ durch $\det(A_{n-2})$ und $\det(A_{n-1})$ aus.
c) Man berechne $\det(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

19. Für den reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} t+1 & 0 & 2 \\ 0 & t-2 & -1 \\ -1 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben.

a) Man berechne $\det(A)$ und bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die A invertierbar ist.
b) Man berechne die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ und bestimme, sofern möglich, die inverse Matrix A^{-1}.

20. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).*

a) Man zeige, daß die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist, und bestimme ihre inverse Matrix M^{-1}.

b) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Spaltenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A \cdot v_i = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.