MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 4
11.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

13. Gegeben seien die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Man berechne $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(C)$.
   b) Man bestimme $\det(2A)$, $\det(A^2)$ und $\det(BC)$.

14. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2017).* Gegeben sei die Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$
   a) Man berechne die Determinante von B.
   b) Man zeige mit Hilfe von a), dass die Matrix $C = -\frac{1}{2}B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die Determinante $\det(C) < -1$ besitzt.
   c) Man untersuche, ob es eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $F^2 = C$ gibt.

15. Für den Parameter $a \in \mathbb{R}$ seien die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & a & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & a \\ a & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & a & -a \\ -a & \sqrt{2} & a \\ a & -a & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
gegeben.
   a) Man zeige, daß A genau dann invertierbar ist, wenn $a \neq 0$ gilt.
   b) Man zeige, daß S für alle $a \in \mathbb{R}$ invertierbar ist, und bestimme $\det(S^{-1}AS)$.

16. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2001).* Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ sei
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2} \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
   a) Man zeige, daß für alle α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt: $A_\alpha \cdot A_\beta = A_{\alpha+\beta}$.
   b) Man bestimme unter Zuhilfenahme von a) die zu A_α inverse Matrix.
   c) Man zeige durch direkte Rechnung $A_{3\alpha} - 3A_{2\alpha} + 3A_\alpha = E$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
   d) Man bestimme mit Hilfe von a) und c) reelle Zahlen a_0, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $a_3A_\alpha^3 + a_2A_\alpha^2 + a_1A_\alpha + a_0E = 0$.