MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Repetitorium
03.02.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“

1. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).* Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & \lambda\, x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & \lambda\, x_3 & + & \lambda\, x_4 & = & 0 \\ -x_1 & & & + & \lambda\, x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & + & \lambda^2\, x_4 & = & 1 \end{array}$$

2. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(G_t) \qquad \begin{array}{rcl} -x + 3\,z & = & 3 \\ -\,2\,x - t\,y + z & = & 2 \\ x + 2\,y + t\,z & = & 1, \end{array}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ eine feste reelle Zahl ist.

   a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist (G_t) eindeutig lösbar?
   b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) keine Lösung?
   c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) mehrere Lösungen?
   d) Man gebe in den Fällen der Lösbarkeit die Lösungsmenge von (G_t) an.

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017).* Für beliebige reelle Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ ist in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & \lambda\, z & = & a \\ x & + & \lambda\, y & & & = & b \\ \lambda\, x & + & y & + & z & = & c \end{array}$$

gegeben.

   a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
   b) Man bestimme für $\lambda = 1$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
   c) Unter welchen Bedingungen an a, b, $c \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem für $\lambda = 0$ lösbar?

4. *(Klausurteilaufgabe Wintersemester 2011/12).* Man bestimme alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist, und bestimme hierfür die inverse Matrix.

5. a) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1997).* Man berechne $\det(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

b) Man zeige mit Hilfe von a), dass die Matrix $B = -\frac{1}{2}A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die Determinante $\det(B) = -15$ besitzt.

c) Man untersuche, ob es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $C^2 = B$ gibt.

6. a) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2004).* Für 2×2–Matrizen $A,\ B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beweise oder widerlege man die folgenden Aussagen:

- $\det(AB) = 0 \iff \det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$.
- $AB = 0 \iff A = 0$ oder $B = 0$.
- $A^2 = E_2 \implies A = E_2$ oder $A = -E_2$.

b) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Für invertierbare 2×2–Matrizen $A,\ B,\ C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ beweise oder widerlege man die folgenden Aussagen:

- A und B symmetrisch $\implies$ $A \cdot B$ symmetrisch.
- A symmetrisch $\implies$ A^{-1} symmetrisch.
- A symmetrisch $\implies$ $C^\top AC$ symmetrisch.

7. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2013/14).* Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachte man die Teilmengen

$$U = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top = -A\right\} \qquad \text{und} \qquad W = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = 0\right\}$$

des Matrizenraums $\mathbb{R}^{n\times n}$ sowie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & -s & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s & 0 & -s & \ddots & & \vdots \\ 0 & s & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -s \\ 0 & \dots & \dots & 0 & s & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Man zeige, daß U sogar ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

b) Man weise die Rekursionsformel $\det(A_{n+2}) = s^2 \cdot \det(A_n)$ nach.

c) Man beweise: $U \subseteq W \iff n$ ungerade.

8. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2011/12).*

   a) Man zeige, daß

   $$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a+b-c=0 \right\}$$

   ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, und berechne die Dimension von U. Ferner bestimme man einen zu U komplementären Unterraum W in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, also mit $U+W=\mathbb{R}^{2\times 2}$ und $U \cap W = \{0\}$.

   b) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

   $$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   sowie die Unterräume $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ gegeben. Man bestimme eine Basis von $U \cap W$.

9. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2013/14).* Im $\mathbb{R}^4$ sind in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

   $$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad u_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   gegeben; ferner sei $U = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Man zeige, daß u_1, u_2, u_3, u_4 ein Erzeugendensystem von U sind, und stelle u_5 als deren Linearkombination dar.

   b) Man bestimme $\dim U$ in Abhängigkeit von t.

   c) Man gebe für $t=1$ eine Basis von U an und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

10. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).* Gegeben seien

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

   a) Man bestimme eine Basis des Lösungsraums L_0 des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.

   b) Man gebe die Lösungsmenge L des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ an.

   c) Man ergänze die Basis von L_0 aus a) zu einer Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^5$.

11. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* In Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ seien

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & -2t & t & 4+t \\ -4t & -4 & 2-2t & 8t \\ 6 & -6 & 3+t & -9+t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5} \qquad \text{und} \qquad b_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3-t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben.

a) Man bestimme in Abhängigkeit von t den Rang der Matrix A_t.

b) Man berechne eine Basis für den Kern der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = A_0 \cdot x.$$

c) Für welche Werte von t ist das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$A_t \cdot x = b_t$$

lösbar?

12. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben; dabei ist t ein reeller Parameter.

a) Man bestimme alle Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, und stelle in den anderen Fällen den Nullvektor jeweils als nichttriviale Linearkombination dieser Vektoren dar.

b) Man bestimme alle Parameter $t \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3$$

gibt. Man entscheide, in welchen Fällen f dadurch eindeutig bestimmt ist.

13. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2011/12).* Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + 2\,a_2 & a_2 \\ -a_1 + a_2 & a_1 + 3\,a_2 \end{pmatrix},$$

sowie die Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Man zeige, daß f linear ist.

b) Man zeige, daß B_1, B_2, B_3, B_4 eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

c) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen 1, X, X^2 von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ und B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

14. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2010).* Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p' - (X+1) \cdot p''.$$

Dabei bezeichne p' bzw. p'' die erste bzw. zweite Ableitung des Polynoms p.

a) Man zeige, daß f linear ist.

b) Man bestimme die darstellende Matrix M von f bezüglich der Standardbasen $1, X, X^2, X^3$ von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ und $1, X, X^2$ von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$.

c) Man berechne eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ sowie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

15. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Für die reelle 3×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x;$$

es seien $U = \mathrm{Kern}(f)$ der Kern von f sowie $W = \mathrm{Bild}(f)$ der Bildraum von f.

a) Man zeige, daß sowohl U als auch W die Dimension 2 besitzt, und bestimme eine Basis von U sowie eine Basis von W.

b) Man ermittle eine Basis von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass f bezüglich dieser Basen die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt.

16. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2003).* Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$–Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Man entscheide (mit Begründung), welche der folgenden sechs Eigenschaften von f zueinander äquivalent sind:

(i)	f ist injektiv	(iv)	$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim W$
(ii)	f ist surjektiv	(v)	$\dim \mathrm{Kern}(f) = 0$
(iii)	$\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim V$	(vi)	$\dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V - \dim W$

Bitte beachten: Die Aufgaben dieses Repetitoriums sollen der eigenständigen Wiederholung und Vertiefung des Stoffes der Vorlesung dienen; die Bearbeitungen sind nicht abzugeben. Die Lösungsvorschläge werden zu gegebener Zeit veröffentlicht.