MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 13
27.01.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

49. a) Die in Abhängigkeit vom reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sind genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn die Matrix $B_t = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist; wegen

$$\det(B_t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & t \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{1. Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & t \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3\,t$$

ist dies genau für $\det(B_t) = 2 - 3\,t \neq 0$, also $t \neq \frac{2}{3}$, der Fall.

b) Für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$ sind v_1, v_2, v_3 gemäß a) eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung gibt es für jeden $\mathbb{R}$–Vektorraum W und jede Vorgabe von w_1, w_2, $w_3 \in W$ genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to W \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3;$$

hier ist speziell $W = \mathbb{R}^3$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Für $t = \frac{2}{3}$ gilt $v_3 = \frac{1}{3}\,v_2$; wir ergänzen die beiden linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2 durch ein $v_4 \in \mathbb{R}^3$ mit $v_4 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ zu einer Basis v_1, v_2, v_4 von $\mathbb{R}^3$, und für jedes beliebige $w_4 \in \mathbb{R}^3$ gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung eine (zu w_4 eindeutig bestimmte) lineare Abbildung $f_{w_4} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_{w_4}(v_1) = w_1, \quad f_{w_4}(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f_{w_4}(v_4) = w_4.$$

Für diese gilt ferner

$$f_{w_4}(v_3) = f_{w_4}(\tfrac{1}{3}\,v_2) = \tfrac{1}{3}\,f_{w_4}(v_2) = \tfrac{1}{3}\,w_2 = w_3;$$

folglich gibt es in diesem Fall sogar unendlich viele lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3.$$

c) Für $t = 1$ gibt es gemäß b) genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3;$$

die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ ist dabei die Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $f(x) = A\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Damit ergibt sich

$$A\,v_1 = f(v_1) = w_1, \quad A\,v_2 = f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad A\,v_3 = f(v_3) = w_3,$$

also

$$A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (A\,v_1, A\,v_2, A\,v_3) = (w_1, w_2, w_3)\,.$$

Mit $B_1 = (v_1, v_2, v_3) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ gemäß a) und $C = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt also

$$A \cdot B_1 = C \qquad \text{und damit} \qquad A = C \cdot B_1^{-1};$$

wegen

$$(B_1 \mid E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-5\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\frac{3}{2}\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{\text{II}+2\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{(-2)\text{III}}{\overset{\frac{1}{2}\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & 3 & -2 \end{array}\right) = \left(E_3 \mid B_1^{-1}\right)$$

ergibt sich

$$A = C \cdot B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -13 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

50. Für die in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebenen Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

betrachten wir die Hilfsmatrix $B_\alpha = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 5 \end{pmatrix},$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\alpha \neq 5$, also $\alpha - 5 \neq 0$, ist $\operatorname{Rang}(B_\alpha) = 3$; damit sind die drei Spalten v_1, v_2, v_3 von B_α linear unabhängig, wegen $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ also schon eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Folglich gibt es nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung für jeden $\mathbb{R}$–Vektorraum W und jede Vorgabe von $w_1, w_2, w_3 \in W$ genau eine lineare Abbildung

  $$f : \mathbb{R}^3 \to W \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2 \ \text{ und } \ f(v_3) = w_3;$$

  hier ist speziell $W = \mathbb{R}^2$ mit

  $$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

  für jeden reellen Parameter $\beta \in \mathbb{R}$.
- Für $\alpha = 5$, also $\alpha - 5 = 0$, ist $\operatorname{Rang}(B_5) = 2$; das homogene lineare Gleichungssystem $B_5 \cdot x = 0$ besitzt wegen

  $$(B_5 \mid 0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I–II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  etwa die nichttriviale Lösung $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, wodurch sich in

  $$1 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$$

  eine Darstellung des Nullvektors als nichttriviale Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ergibt. Es ist also $v_3 = 2\,v_2 - v_1$, und für jede lineare Abbildung

  $$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3$$

  ergibt sich damit

  $$w_3 = f(v_3) = f(2\,v_2 - v_1) = 2\,f(v_2) - f(v_1) = 2\,w_2 - w_1,$$

  also notwendigerweise

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und damit} \qquad \beta = 3.$$

  Wir unterscheiden dementsprechend die folgenden Unterfälle:
  - Für $\beta \neq 3$ kann es keine lineare Abbildung

    $$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3$$

    geben, da die drei Vorgaben einander widersprechen.

– Für $\beta = 3$ ergänzen wir die beiden linear unabhängigen Vektoren v_1, v_2 durch ein $v_4 \in \mathbb{R}^3$ mit $v_4 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ zu einer Basis v_1, v_2, v_4 von $\mathbb{R}^3$; folglich gibt es für jedes beliebige $w_4 \in \mathbb{R}^2$ nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung eine (zu w_4 eindeutig bestimmte) lineare Abbildung $f_{w_4} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_{w_4}(v_1) = w_1, \quad f_{w_4}(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f_{w_4}(v_4) = w_4,$$

und für diese gilt ferner

$$f_{w_4}(v_3) = f_{w_4}(2v_2 - v_1) = 2f_{w_4}(v_2) - f_{w_4}(v_1) = 2w_2 - w_1 = w_3.$$

Folglich gibt es insgesamt unendlich viele lineare Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3.$$

51. a) Wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 & -7 \\ 3 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \overset{\text{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+5\text{II}}{\overset{\text{I}-3\text{I}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist $r = \text{Rang}(A) = 2$ und damit

$$\dim \text{Kern}(f) = 4 - r = 2 \qquad \text{sowie} \qquad \dim \text{Bild}(f) = r = 2;$$

genauer gilt:

- $U = \text{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\}$ stimmt mit dem Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ mit den freien Variablen x_2 und x_4 überein; folglich ist

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von U.

- $W = \text{Bild}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^4\}$ stimmt mit dem Spaltenraum der Matrix A überein; da die erste und dritte Spalte einen Pivot beinhaltet, bilden die erste und dritte Spalte von A, also

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

eine Basis von W.

b) Für eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\operatorname{Kern}(g) = W$ und $\operatorname{Bild}(g) = U$ müßte nach der Dimensionsformel

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Kern}(g) + \dim \operatorname{Bild}(g) = \dim W + \dim U = 2 + 2 = 4$$

gelten; daher kann es keine derartige lineare Abbildung geben.

52. Für eine fest gewählte invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ wird die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(X) = M\left(X + X^\top\right),$$

betrachtet.

a) Für alle X, $Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= M\left((X+Y) + (X+Y)^\top\right) \\ &= M\left((X+Y) + (X^\top + Y^\top)\right) \\ &= M\left((X+X^\top) + (Y+Y^\top)\right) \\ &= M\left(X+X^\top\right) + M\left(Y+Y^\top\right) = f(X) + f(Y); \end{aligned}$$

damit ist f additiv. Für alle $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot X) &= M\left(\lambda \cdot X + (\lambda \cdot X)^\top\right) \\ &= M\left(\lambda \cdot X + \lambda \cdot X^\top\right) \\ &= M\left(\lambda \cdot (X + X^\top)\right) \\ &= \lambda \cdot \left(M\left(X + X^\top\right)\right) = \lambda \cdot f(X); \end{aligned}$$

damit ist f auch homogen, insgesamt also linear.

b) Für eine Matrix $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Kern}(f) \quad &\iff \quad f(X) = O \iff M\left(X + X^\top\right) = O \\ &\underset{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}{\iff} \quad X + X^\top = O \iff X^\top = -X \\ &\iff \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 \\ -x_3 & -x_4 \end{pmatrix} \\ &\iff \quad x_1 = -x_1,\ x_3 = -x_2,\ x_2 = -x_3,\ x_4 = -x_4 \\ &\iff \quad x_1 = 0,\ x_2 = -x_3,\ x_4 = 0 \\ &\iff \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

damit gilt

$$\operatorname{Kern}(f) = \mathbb{R} \cdot X_0 \qquad \text{mit} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und wegen $X_0 \neq O$ ist X_0 eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$.

c) Wir nehmen zum Widerspruch an, es gebe eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$f(X) = A \cdot X \qquad \text{für alle} \qquad X \in \mathbb{R}^{2\times 2};$$

mit der Matrix $X_0 \in \mathrm{Kern}(f)$ von b) ergibt sich damit

$$O = f(X_0) = A \cdot X_0,$$

wegen $X_0 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ gemäß $\det(X_0) = 1 \neq 0$ also $A = O$ und damit

$$f(X) = A \cdot X = O \cdot X = O \qquad \text{für alle} \qquad X \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

im Widerspruch zu $\mathrm{Kern}(f) \neq \mathbb{R}^{2\times 2}$. Folglich kann es keine derartige Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ geben.