MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 12
20.01.2020

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

45. Das lineare Gleichungssystem $M \cdot x = b$ mit einer quadratischen Koeffizientenmatrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ invertierbar ist; in diesem Fall ist die Lösungsmenge $L = \{M^{-1} \cdot b\}$ einelementig. Ansonsten ist $\mathrm{Rang}(M) < n$, und $M \cdot x = b$ ist im Falle $\mathrm{Rang}(M) < \mathrm{Rang}(M|b)$ unlösbar sowie im Falle $\mathrm{Rang}(M) = \mathrm{Rang}(M|b)$ wegen $\dim L = n - \mathrm{Rang}(M) \geq 1$ mehrdeutig lösbar.

a) Für die in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ gegebene Matrix $A_\alpha \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(A_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{I}-\text{II}}{\overset{\text{Spalten}}{=}} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}}$$
$$= (-1)^{1+1} \cdot \alpha \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} \alpha \cdot \big(1 \cdot (-1) \cdot (-1)\big) = \alpha,$$

so daß sich für $B_\alpha = A_\alpha A_\alpha^\top \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ unter Verwendung des Determinantenmultiplikationssatzes

$$\det(B_\alpha) = \det(A_\alpha \cdot A_\alpha^\top) = \det(A_\alpha) \cdot \underbrace{\det(A_\alpha^\top)}_{=\det(A_\alpha)} = \big(\det(A_\alpha)\big)^2 = \alpha^2$$

ergibt. Damit ist das lineare Gleichungssystem $B_\alpha \cdot x = b$ genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det(B_\alpha) \neq 0$ ist, also genau im Falle $\alpha \neq 0$.

b) Für $\alpha = 1$ besitzt das lineare Gleichungssystem $B_1 \cdot x = b$ gemäß a) eine eindeutig bestimmte Lösung; dabei gilt

$$B_1 \cdot x = b \iff \big(A_1 \cdot A_1^\top\big) \cdot x = b \iff$$
$$\iff A_1 \cdot \big(A_1^\top \cdot x\big) = b \iff \big(A_1 \cdot y = b \;\text{ und }\; A_1^\top \cdot x = y\big).$$

Wegen

$$(A_1|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

ist zunächst

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

und wegen

$$(A_1^\top|y) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow}$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

ergibt sich schließlich die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

46. Für eine Matrix $M = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit den n Spalten $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^m$ bezeichne

$$S_M = \langle s_1, \dots, s_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$$

den von $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}^m$ erzeugte Spaltenraum von M, und damit ist

$$\operatorname{Rang}(M) = \dim(S_M).$$

a) Für die Matrizen $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist

$$A + B = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

und wegen

$$\begin{aligned} S_{A+B} &= \langle a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n \rangle \\ &\subseteq \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \rangle \\ &= \langle a_1, \dots, a_n \rangle + \langle b_1, \dots, b_n \rangle = S_A + S_B \end{aligned}$$

ergibt sich mit der Dimensionsformel für Unterräume

$$\begin{aligned}\operatorname{Rang}(A+B) = \dim(S_{A+B}) \leq \dim(S_A + S_B) = \\ = \dim(S_A) + \dim(S_B) - \dim(S_A \cap S_B) \leq \\ \leq \dim(S_A) + \dim(S_B) = \operatorname{Rang}(A) + \operatorname{Rang}(B).\end{aligned}$$

b) Für die Matrizen $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ist

$$A\,B = A \cdot (b_1, \ldots, b_p) = (A \cdot b_1, \ldots, A \cdot b_p) \in \mathbb{R}^{m \times p},$$

und wegen

$$A \cdot x = \lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n \quad \text{für alle} \quad x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist

$$S_{A\,B} = \langle A \cdot b_1, \ldots, A \cdot b_p \rangle \subseteq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = S_A$$

und damit

$$\operatorname{Rang}(A\,B) = \dim(S_{A\,B}) \leq \dim(S_A) = \operatorname{Rang}(A);$$

entsprechend erhält man

$$\operatorname{Rang}(A\,B) = \operatorname{Rang}\left((A\,B)^\top\right) = \operatorname{Rang}\left(B^\top A^\top\right) \leq \operatorname{Rang}\left(B^\top\right) = \operatorname{Rang}(B),$$

zusammen also

$$\operatorname{Rang}(A\,B) \leq \min\left\{\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B)\right\}.$$

47. Die gegebene Abbildung

$$f : \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R}) \to \operatorname{Pol}_2(\mathbb{R}), \quad a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mapsto 3\,a_3X^2 + 2\,a_2X + a_1,$$

ordnet jedem Polynom

$$v = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$$

mit $\operatorname{Grad}(v) \leq 3$ das „abgeleitete“ Polynom

$$f(v) = 3\,a_3X^2 + 2\,a_2X + a_1 \in \operatorname{Pol}_2(\mathbb{R})$$

mit $\operatorname{Grad}(f(v)) \leq 2$ zu; die Abbildung f kann demnach als „Ableitung von Polynomen“ interpretiert werden.

a) Für alle

$$v_1 = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0, \quad v_2 = b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0 \in \operatorname{Pol}_3(\mathbb{R})$$

gilt

$$v_1 + v_2 = (a_3 + b_3)\, X^3 + (a_2 + b_2)\, X^2 + (a_1 + b_1)\, X + (a_0 + b_0)$$

und damit

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= 3\,(a_3 + b_3)\, X^2 + 2\,(a_2 + b_2)\, X + (a_1 + b_1) = \\ &= \big(3\, a_3 X^2 + 2\, a_2 X + a_1\big) + \big(3\, b_3 X^2 + 2\, b_2 X + b_1\big) = f(v_1) + f(v_2); \end{aligned}$$

damit ist f additiv. Für alle

$$v = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

gilt

$$\lambda \cdot v = (\lambda\, a_3)\, X^3 + (\lambda\, a_2)\, X^2 + (\lambda\, a_1)\, X + (\lambda\, a_0)$$

und damit

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot v) &= 3\,(\lambda\, a_3)\, X^2 + 2\,(\lambda\, a_2)\, X + (\lambda\, a_1) = \\ &= \lambda \cdot \big(3\, a_3 X^2 + 2\, a_2 X + a_1\big) = \lambda \cdot f(v); \end{aligned}$$

damit ist f homogen. Folglich ist f eine lineare Abbildung.

b) Für

$$v_1 = X^3 + X^2 + X + 1 \quad \text{und} \quad v_2 = X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

gilt

$$v_1 \neq v_2 \qquad \text{und} \qquad f(v_1) = 3\, X^2 + 2\, X + 1 = f(v_2);$$

damit ist f nicht injektiv. Für jedes

$$w = b_2 X^2 + b_1 X + b_0 \in \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$$

gibt es

$$v = \frac{b_2}{3}\, X^3 + \frac{b_1}{2}\, X^2 + b_0 X \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$$

mit

$$f(v) = 3 \cdot \frac{b_2}{3}\, X^2 + 2 \cdot \frac{b_1}{2}\, X + b_0 = b_2 X^2 + b_1 X + b_0 = w;$$

damit ist f surjektiv.

48. a) Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V.$$

Aus dieser Beziehung erhalten wir mit der Abbildung $f : V \to W$ dann

$$f\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n\right) = f\left(0_V\right),$$

und wegen der Linearität von f ergibt sich

$$\lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n) = 0_W.$$

Da die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$; damit sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig.

b) Die Kontraposition zu a) lautet

$$v_1, \ldots, v_n \text{ linear abhängig} \implies f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear abhängig}$$

für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$. Da diese zur Aussage von a) logisch äquivalent ist, ist auch sie allgemeingültig.

c) Die Umkehrung von a)

$$v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig} \implies f(v_1), \ldots, f(v_n) \text{ linear unabhängig}$$

für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ ist unter der Voraussetzung, daß die lineare Abbildung $f : V \to W$ injektiv ist, gültig. Zum Nachweis seien $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot f(v_1) + \ldots + \lambda_n \cdot f(v_n) = 0_W.$$

Wegen der Linearität von f ergibt sich zunächst

$$f\left(\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n\right) = f\left(0_V\right)$$

und wegen der Injektivität von f dann

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0_V.$$

Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$; damit sind $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig.