MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 10
23.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

37. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ mit

$$B = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Wegen

$$(B|v) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I, IV}-4\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & -11 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-7\text{II}}{\overset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) \underset{\text{III}\leftrightarrow\frac{1}{4}\text{IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = v$ lösbar, also der Vektor v eine Linearkombination der Spalten v_1, v_2, v_3, v_4 der Matrix B; genauer erhält man etwa mit der Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

die Linearkombination

$$v = (-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = V.$$

Der Spaltenraum $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ der Matrix $B = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ besitzt ferner die Dimension

$$\dim V = \operatorname{Rang} B = 3.$$

38. Es ist $V = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$. Für ein Polynom $p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ betrachte man den Koordinatenvektor $q(p) = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Standardbasis X^3, X^2, X, 1 von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$; für die gegebenen Vektoren

$$p_1 = X^3 - X^2, \quad p_2 = X^3 - X, \quad p_3 = X^2 - X \quad \text{und} \quad p_4 = X^3 - 1$$

ergibt sich also

$$q(p_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; q(p_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; q(p_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q(p_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sei $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit dem Koordinatenvektor $q(p) \in \mathbb{R}^4$; mit der Hilfsmatrix $A = (q(p_1), q(p_2), q(p_3), q(p_4)) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ erhält man

$$\begin{aligned}
(A \mid q(p)) \quad &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{II+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III+II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{IV+III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 + a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{array}\right),
\end{aligned}$$

und es ist

$$p(1) = a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0.$$

Folglich ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p \in U \quad &\iff \quad p \in \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \\
&\iff \quad q(p) \in \langle q(p_1), q(p_2), q(p_3), q(p_4) \rangle \\
&\iff \quad \text{Das lineare Gleichungssystem } (A \mid q(p)) \text{ ist lösbar.} \\
&\iff \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \iff p(1) = 0
\end{aligned}$$

Damit ist U die Menge aller Polynome $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit Nullstelle 1.

b) Gemäß der Rechnung von a) ist

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Pivots in der ersten, zweiten und vierten Spalte; damit sind aber $q(p_1)$, $q(p_2)$, $q(p_4)$ linear unabhängig mit $q(p_3) = -q(p_1) + q(p_2)$. Folglich sind auch p_1, p_2, p_4 linear unabhängig mit $p_3 = -p_1 + p_2$, mithin eine Basis von $U = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$.

Wegen $\dim \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) = 4$ lassen sich die drei Basisvektoren p_1, p_2, p_4 von U durch jeden Vektor $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit $p \notin U$, also $p(1) \neq 0$ gemäß a), zu einer Basis p_1, p_2, p_4, p von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ ergänzen; wir können etwa $p = X^3$ wählen.

39. a) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, wenn er sowohl Linearkombination von u_1, u_2 als auch Linearkombination von w_1, w_2 ist, wenn es also Koeffizienten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{x \in W}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-w_1) + \mu_2 \cdot (-w_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad A = (u_1, u_2, -w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+3\text{II}}{\overset{\text{III}+\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I}-\text{III},\text{II}-\text{III},\text{IV}-2\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,\alpha \\ 2\,\alpha \\ -4\,\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{(-3\,\alpha) \cdot u_1 + 2\,\alpha \cdot u_2}_{x \in U} = x = \underbrace{(-4\,\alpha) \cdot w_1 + \alpha \cdot w_2}_{x \in W}, \quad \text{also} \quad x = (-\alpha) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot v \qquad \text{mit} \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

weswegen v insbesondere eine Basis von $U \cap W$ ist.

b) Wir weisen anhand der Definition nach, daß u_1, u_2, w_1 eine Basis von $U+W$ ist:

- Es ist $U + W = \langle u_1, u_2, w_1, w_2 \rangle$; gemäß a) gilt (für $\alpha = -1$)

  $$3\,u_1 - 2\,u_2 = v = 4\,w_1 - w_2,$$

  also $w_2 = -3\,u_1 + 2\,u_2 + 4\,w_1$, woraus sich $U + W = \langle u_1, u_2, w_1 \rangle$ ergibt. Damit ist sind u_1, u_2, w_1 ein Erzeugendensystem von $U + W$.
- Offensichtlich sind u_1, u_2 linear unabhängig; gemäß a) ist

  $$w_1 \notin \mathbb{R} \cdot v = U \cap W,$$

  woraus sich wegen $w_1 \in W$ schon

  $$w_1 \notin U = \langle u_1, u_2 \rangle$$

  ergibt. Damit sind aber u_1, u_2, w_1 linear unabhängig.

Eine alternative Argumentation stützt sich auf die Dimension von $U+W$: da offenbar u_1, u_2 sowie w_1, w_2 jeweils linear unabhängig sind, gilt $\dim(U) = 2$ und $\dim(W) = 2$, und aus $v \neq 0$ folgt $\dim(U \cap W) = 1$; nach der Dimensionsformel ergibt sich also

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Damit genügt es, für die drei Vektoren u_1, u_2, w_1 von $U+W$ lediglich eine der beiden Eigenschaften — Erzeugendensystem oder lineare Unabhängigkeit — nachzuweisen.

Auf jeden Fall besitzt w_2 wegen

$$w_2 = (-3) \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 4 \cdot w_1$$

bezüglich der Basis u_1, u_2, w_1 die Koordinaten -3, 2, 4.

c) Für $A' = (u_1, u_2, w_1, e_1) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{4. Spalte}}{=}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} -((0-2+3)-(2+0-1)) = 0;$$

damit sind u_1, u_2, w_1, e_1 linear abhängig, woraus sich wegen der linearen Unabhängigkeit von u_1, u_2, w_1 dann $e_1 \in \langle u_1, u_2, w_1\rangle = U + W$ ergibt.

40. a) Der Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ wird von den drei Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Da A_1 und A_3 keine skalaren Vielfachen voneinander sind, sind sie linear unabhängig; für λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} A_2 = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 + 7\lambda_2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\lambda_1 = 3 \ \text{ und } \ \lambda_2 = 1) \end{aligned}$$

und damit

$$A_2 = 3 \cdot A_1 + 1 \cdot A_3 \in \langle A_1, A_3\rangle.$$

Folglich ist bereits A_1, A_3 ein Erzeugendensystem von U, insgesamt also eine Basis von U; demnach gilt $\dim(U) = 2$. Ferner wird der Untervektorraum $W \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ von den zwei Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Da diese keine skalaren Vielfachen voneinander sind, sind sie linear unabhängig, insgesamt also eine Basis von W, und es gilt $\dim(W) = 2$.

b) Für eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt genau dann $C \in U \cap W$, wenn es Koeffizienten λ_1, λ_2, μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_3}_{\in U} = C = \underbrace{\mu_1 \cdot B_1 + \mu_2 \cdot B_2}_{\in W},$$

also

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 + 7\lambda_2 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} -\mu_1 + \mu_2 & \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_1 + 2\mu_2 & -2\mu_1 + 4\mu_2 \end{pmatrix},$$

gibt; dies führt auf das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \mu_1 & - & \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \mu_1 & - & \mu_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & & & - & \mu_1 & - & 2\mu_2 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 7\lambda_2 & + & 2\mu_1 & - & 4\mu_2 & = & 0 \end{array}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{I, IV}+\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \underset{(-1)\cdot\text{III}}{\overset{(-\frac{1}{2})\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \underset{\text{III}-\text{II, IV}-8\text{II}}{\overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underset{\text{IV}+5\text{III}}{\overset{\text{II}-\text{III}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit mit den Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

und wir erhalten

$$C = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ \alpha & 6\alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Folglich ist

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot C \qquad \text{mit} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

c) Gemäß b) ist $C \neq 0$ eine Basis von $U \cap W$, und es gilt $\dim(U \cap W) = 1$. Mit der Dimensionsformel für Untervektorräume erhalten wir damit

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

d) Wir ergänzen zunächst die Basis C von $U \cap W$

- mit A_1 zur Basis C, A_1 von U: da C und A_1 keine skalaren Vielfachen voneinander sind, sind sie linear unabhängig und wegen $\dim(U) = 2$ schon eine Basis von U;
- mit B_1 zur Basis C, B_1 von W: da C und B_1 keine skalaren Vielfachen voneinander sind, sind sie linear unabhängig und wegen $\dim(W) = 2$ schon eine Basis von W;

damit bilden aber C, A_1, B_1 eine Basis von $U + W$.