Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

33. a) Sei $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}-4\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}+3\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{III}+3\mathrm{II}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}+5\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{III}\cdot(-\frac{1}{3})}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}\mu \\ -\frac{2}{5}\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$ Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$. Etwa für $\mu = 5$ erhält man $3 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 5 \cdot v_4 = 0$. Damit sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig.

b) Wegen $v_4 = (-\frac{3}{5}) \cdot v_1 + \frac{2}{5} \cdot v_2$ ist $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Mit $A' = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & -7 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es ist also $x = 0$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems $A' \cdot x = 0$; damit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, bilden also eine Basis von V.

Des weiteren gilt:

- Wegen $v_2 = \frac{3}{2} \cdot v_1 + \frac{5}{2} \cdot v_4$ ist $V = \langle v_1, v_3, v_4 \rangle$; wegen $\dim(V) = 3$ ist damit v_1, v_3, v_4 schon eine Basis von V.
- Wegen $v_1 = \frac{2}{3} \cdot v_2 + (-\frac{5}{3}) \cdot v_4$ ist $V = \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$; wegen $\dim(V) = 3$ ist damit v_2, v_3, v_4 schon eine Basis von V.
- Da v_1, v_2, v_4 linear abhängig sind, bilden diese Vektoren insbesondere keine Basis von V.

c) Eine Basis von V läßt sich genau dann mit dem Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen, wenn $b \notin V$ gilt; insbesondere hängt dieser Vektor b nicht davon ab, welche konkrete Basis von V ergänzt werden soll.
Wegen

$$(A'|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & b_2 \\ 2 & -7 & 3 & -4 & b_3 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-4\text{I}}{\overset{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & b_2 \\ 0 & -15 & 3 & -6 & -2\,b_1 + b_3 \\ 0 & -15 & 1 & -6 & -4\,b_1 + b_4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{IV}+3\text{II}}{\overset{\text{III}+3\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2\,b_1 + 3\,b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -4\,b_1 + 3\,b_2 + b_4 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+5\text{III}}{\overset{\text{IV}\cdot(-3)}{\rightsquigarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 5 & -2 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2\,b_1 + 3\,b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,b_1 + 6\,b_2 + 5\,b_3 - 3\,b_4 \end{array}\right)$$

gilt dabei $b \notin V$ genau dann, wenn $2\,b_1 + 6\,b_2 + 5\,b_3 - 3\,b_4 \neq 0$ ist.

34. Für einen Vektor $v \in V$ betrachten wir seinen Koordinatenvektor $p(v) \in \mathbb{R}^4$ bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von V, es ist also

$$p(a_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p(a_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Für die Hilfsmatrix $A = (p(a_1), p(a_2), p(a_3)) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und einen Spaltenvektor $z \in \mathbb{R}^4$ ergibt sich

$$(A|z) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & z_1 \\ -1 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{2}\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ -1 & 1 & 0 & z_2 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array}\right) \underset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 1 & z_3 \\ 0 & 1 & -1 & z_4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{IV}-\text{II}}{\overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & -1 & z_4 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}+\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 1 & 0 & z_2 + \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_3 - z_2 - \frac{1}{2}z_1 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 + z_3 - 2z_2 - z_1 \end{array}\right);$$

mit dieser Rechnung lassen sich nun alle drei Teilaufgaben bearbeiten.

a) Das homogene lineare Gleichungssystem $(A|0)$, also mit $z = 0$, ist ohne freie Variable und besitzt demnach nur die triviale Lösung; folglich sind die Koordinatenvektoren $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$ linear unabhängig, weswegen auch die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear unabhängig sind. Gemäß der Definition von $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ sind a_1, a_2, a_3 auch ein Erzeugendensystem von U, insgesamt also eine Basis von U.

b) Für $z = p(x) \in \mathbb{R}^4$ ergibt sich gemäß obiger Rechnung

$$(A \mid p(x)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

damit ist das lineare Gleichungssystem $(A|p(x))$ lösbar, also $p(x)$ eine Linearkombination von $p(a_1)$, $p(a_2)$, $p(a_3)$, wobei deren Koeffizienten durch die Lösung gegeben werden. Wegen

$$p(x) = 3 \cdot p(a_1) + (-2) \cdot p(a_2) + 2 \cdot p(a_3)$$

ergibt sich entsprechend

$$x = 3 \cdot a_1 + (-2) \cdot a_2 + 2 \cdot a_3 \in \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = U,$$

und x besitzt bezüglich der Basis a_1, a_2, a_3 von U die Koordinaten 3, -2, 2.

c) Die gemäß a) linear unabhängigen Vektoren a_1, a_2, a_3 können mit jedem Vektor $a_4 \in V$ mit $a_4 \notin \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ zu einer Basis von V ergänzt werden; dies ist aber zu $p(a_4) \notin \langle p(a_1), p(a_2), p(a_3) \rangle$ gleichwertig. Gemäß obiger Rechnung ist also

$$p(a_4) = z \qquad \text{mit} \qquad z_4 + z_3 - 2z_2 - z_1 \neq 0$$

zu wählen; damit ist etwa $p(a_4) = e_1$ und damit $a_4 = b_1$ geeignet.

35. a) Für die Vektoren

$$w_1 = s \cdot v_1 + v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 = v_1 + t \cdot v_2$$

betrachten wir nun ihre Koordinatenvektoren $p(w_1)$ und $p(w_2)$ bezüglich der Basis v_1 und v_2, es ist also

$$p(w_1) = \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p(w_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Damit bilden die Vektoren w_1 und w_2 genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^2$, wenn ihre Koordinatenvektoren $p(w_1)$ und $p(w_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden; dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(w_1), p(w_2)) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

invertierbar ist, also $\det(A) \neq 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = s \cdot t - 1$$

bilden die Vektoren w_1 und w_2 genau dann eine Basis, wenn $s \cdot t - 1 \neq 0$, also $s \cdot t \neq 1$ gilt.

b) Sei $U = \langle v, w \rangle$ der von den beiden Vektoren v und w erzeugte Unterraum von V; da v und w als linear unabhängig vorausgesetzt sind, bilden sie sogar eine Basis von U. Für die Vektoren

$$x = \alpha \cdot v + \beta \cdot w \qquad \text{und} \qquad y = \beta \cdot v + \alpha \cdot w \in U$$

betrachten wir nun ihre Koordinatenvektoren $p(x)$ und $p(y)$ bezüglich der Basis v und w, es ist also

$$p(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad p(y) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Damit sind die Vektoren x und y genau dann linear abhängig, wenn ihre Koordinatenvektoren $p(x)$ und $p(y)$ linear abhängig sind; dies ist genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = (p(x),\ p(y)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

nicht invertierbar ist, also $\det(A) = 0$ gilt. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)\,(\alpha + \beta)$$

sind die Vektoren x und y genau dann linear abhängig, wenn $\alpha - \beta = 0$, also $\alpha = \beta$, oder $\alpha + \beta = 0$, also $\alpha = -\beta$, gilt.

36. a) Wegen $B_3 = 3 \cdot B_1$ und $B_4 = 2 \cdot B_2$ erzeugen bereits B_1 und B_2 den Vektorraum W, und es ist $W = \langle B_1, B_2 \rangle$. Für $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ folgt aus

$$\lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

etwa $\lambda_1 = -2\,\lambda_2$ und $\lambda_1 = -\frac{3}{2}\lambda_2$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; damit sind B_1 und B_2 linear unabhängig und bilden folglich schon eine Basis von W.

Aus $B_3 = 3 \cdot B_1$ und $B_4 = 2 \cdot B_2$ folgt $W = \langle B_1, 2\,B_2 \rangle = \langle B_1, B_4 \rangle$ bzw. $W = \langle 3\,B_1, B_2 \rangle = \langle B_2, B_3 \rangle$ bzw. $W = \langle 3\,B_1, 2\,B_2 \rangle = \langle B_3, B_4 \rangle$ sowie ferner die lineare Unabhängigkeit von B_1, B_4 bzw. B_2, B_3 bzw. B_3, B_4. Damit bilden aber auch B_1, B_4 bzw. B_2, B_3 bzw. B_3, B_4 jeweils eine Basis von W.

b) Wir wählen aus a) die Basis B_1 und B_2 von W sowie die symmetrische Matrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Für alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$ gilt $b = c$, und damit erhalten wir mit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ aus

$$A = \lambda_1 \cdot B_1 + \lambda_2 \cdot B_2 + \lambda_3 \cdot C$$

die Beziehung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also für λ_1, λ_2, λ_3 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 &= a\\ 2\cdot\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 &= b\\ 2\cdot\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2 + 1\cdot\lambda_3 &= b\\ 3\cdot\lambda_1 + 4\cdot\lambda_2 + 0\cdot\lambda_3 &= d \end{aligned}$$

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a\\ 2 & 3 & 1 & b\\ 2 & 3 & 1 & b\\ 3 & 4 & 0 & c \end{array}\right) \underset{\text{IV}-3\cdot\text{II}}{\overset{\text{II}-2\cdot\text{I},\ \text{III}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a\\ 0 & -1 & 1 & b-2\,a\\ 0 & -1 & 1 & b-2\,a\\ 0 & -2 & 0 & c-3\,a \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\cdot\text{II}}{\overset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a\\ 0 & -1 & 1 & b-2\,a\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & c-2\,b+a \end{array}\right) \underset{\text{III}\leftrightarrow\text{IV}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a\\ 0 & -1 & 1 & b-2\,a\\ 0 & 0 & -2 & c-2\,b+a\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar, und folglich ist A in eindeutiger Weise eine Linearkombination von B_1, B_2 und C; damit bilden B_1, B_2 und C eine Basis von U.

c) Wir wählen aus b) die Basis B_1, B_2, C von U sowie die (nicht symmetrische) Matrix $D = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wegen $D \notin U = \langle B_1, B_2, C\rangle$ sind B_1, B_2, C, D linear unabhängig in $\mathbb{R}^{2\times 2}$, wegen $\dim\left(\mathbb{R}^{2\times 2}\right) = 4$ also schon eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.