MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 8
09.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

29. a) Die Vektoren v_1, v_2, v_3 bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn die Matrix $A = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar ist. Wegen

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+0) - (t^3+1+0) = -t^3 - 1$$

ist dies genau für $t^3 \neq -1$, also $t \neq -1$, der Fall. Damit gilt $M = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Die Koordinaten des Vektors $v \in \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3 sind genau die Koeffizienten der Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ des Gleichungssystems $A \cdot x = v$; da nun A invertierbar ist, gilt $x = A^{-1} \cdot v$ mit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{-t^3-1} \begin{pmatrix} -1 & t & -t^2 \\ t & -t^2 & -1 \\ -t^2 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man wegen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^3+1} & -\frac{t}{t^3+1} & \frac{t^2}{t^3+1} \\ -\frac{t}{t^3+1} & \frac{t^2}{t^3+1} & \frac{1}{t^3+1} \\ \frac{t^2}{t^3+1} & \frac{1}{t^3+1} & -\frac{t}{t^3+1} \end{pmatrix}$$

- $e_1 = \frac{1}{t^3+1} \cdot v_1 + (-\frac{t}{t^3+1}) \cdot v_2 + \frac{t^2}{t^3+1} \cdot v_3$; damit sind $\frac{1}{t^3+1}, -\frac{t}{t^3+1}, \frac{t^2}{t^3+1}$, die Koordinaten sowie $\frac{1}{t^3+1}\, v_1, -\frac{t}{t^3+1}\, v_2, \frac{t^2}{t^3+1}\, v_3$ die Komponenten von e_1 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.
- $e_2 = (-\frac{t}{t^3+1}) \cdot v_1 + \frac{t^2}{t^3+1} \cdot v_2 + \frac{1}{t^3+1} \cdot v_3$; damit sind $-\frac{t}{t^3+1}, \frac{t^2}{t^3+1}, \frac{1}{t^3+1}$ die Koordinaten sowie $-\frac{t}{t^3+1}\, v_1, \frac{t^2}{t^3+1}\, v_2, \frac{1}{t^3+1}\, v_3$ die Komponenten von e_2 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.
- $e_3 = \frac{t^2}{t^3+1} \cdot v_1 + \frac{1}{t^3+1} \cdot v_2 + (-\frac{t}{t^3+1}) \cdot v_3$; damit sind $\frac{t^2}{t^3+1}, \frac{1}{t^3+1}, -\frac{t}{t^3+1}$ die Koordinaten sowie $\frac{t^2}{t^3+1}\, v_1, \frac{1}{t^3+1}\, v_2, -\frac{t}{t^3+1}\, v_3$ die Komponenten von e_3 bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3.

c) Es ist also $t=-1$ und damit $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Wegen

$$(A|u)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & u_1\\ 0 & -1 & 1 & u_2\\ -1 & 1 & 0 & u_3\end{array}\right)\underset{\text{III+I}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & u_1\\ 0 & -1 & 1 & u_2\\ 0 & 1 & -1 & u_3+u_1\end{array}\right)\underset{\text{III+II}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & u_1\\ 0 & -1 & 1 & u_2\\ 0 & 0 & 0 & u_3+u_1+u_2\end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A\cdot x=u$ genau dann lösbar, der Vektor u also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn für seine Koeffizienten $u_1+u_2+u_3=0$ gilt. Folglich ist

$$\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\{u\in\mathbb{R}^3\mid u_1+u_2+u_3=0\}.$$

Speziell für $u=0$ ergibt sich

$$(A|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right);$$

damit ist $L=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ \lambda\end{pmatrix}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\cdot x=0$. Folglich sind

$$\lambda\cdot v_1+\lambda\cdot v_2+\lambda\cdot v_3=0$$

für $\lambda\in\mathbb{R}$ die Darstellungen des Nullvektors als Linearkombination der v_1, v_2, v_3.

30. a) Sei $A=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^{4\times 4}$. Wegen

$$(A|0)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 3 & 1 & 0\end{array}\right)\underset{\text{IV}-3\text{I}}{\overset{\text{III}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0\end{array}\right)\underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0\end{array}\right)\underset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

ist

$$L=\left\{\begin{pmatrix}-3\,\lambda\\ \lambda\\ \lambda\\ 0\end{pmatrix}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$; damit sind

$$(-3\,\lambda) \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 + \lambda \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 0$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ alle Darstellungen des Nullvektors 0 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4. Insbesondere sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear abhängig.

b) Für $\lambda = 1$ ergibt sich $v_3 = 3\,v_1 - v_2$, und damit ist $V = \langle v_1, v_2, v_4 \rangle$. Mit $A' = (v_1, v_2, v_4) \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gilt

$$(A'|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es ist also $x = 0$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems $A' \cdot x = 0$; damit sind v_1, v_2, v_4 linear unabhängig. Folglich bilden v_1, v_2, v_4 eine Basis von V.

c) Für $B = (v_1, v_2, v_4, b) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gilt

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 2 & 5 & 0 & b_3 \\ 3 & 6 & 1 & b_4 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-3\text{I}}{\overset{\text{III}-2\text{I}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -4 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_4 - 3\,b_1 \end{vmatrix} \underset{\text{1. Spalte}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & b_2 \\ 1 & -4 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & -5 & b_4 - 3\,b_1 \end{vmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & -5 & b_3 - b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & -5 & b_4 - 3\,b_1 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-\text{II}}{=} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & b_2 \\ 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_4 - b_3 + b_2 - b_1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} (-5)\,(b_4 - b_3 + b_2 - b_1)\,;
\end{aligned}$$

damit ist v_1, v_2, v_4, b genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^4$, wenn

$$b_4 - b_3 + b_2 - b_1 \neq 0 \qquad \text{bzw.} \qquad b_1 + b_3 \neq b_2 + b_4$$

ist.

31. Im reellen Vektorraum

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) &= \{p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 3\} \\
&= \left\{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

aller Polynome $p \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$ ist die Teilmenge

$$U = \{p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$$

zu betrachten.

a) Der Nachweis, daß U ein Untervektorraum von $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ ist, erfolgt über das Unterraumkriterium:

- Für das Nullpolynom $p_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ gilt $p_0(1) = 0$; damit ist $p_0 \in U$, also $U \neq \emptyset$.
- Für alle $p,\ q \in U$ gilt $p,\ q \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit $p(1) = 0$ und $q(1) = 0$; damit ist $p + q \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit

  $$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0,$$

  also $p + q \in U$.
- Für alle $p \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit $p(1) = 0$; damit ist $\lambda \cdot p \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit

  $$(\lambda \cdot p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

  also $\lambda \cdot p \in U$.

b) Für alle $p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ mit $a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} p \in U \quad &\iff \quad p(1) = 0 \iff a_3 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1 + a_0 = 0 \\ &\iff \quad a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \iff a_0 = -\left(a_3 + a_2 + a_1\right) \\ &\iff \quad p = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X - \left(a_3 + a_2 + a_1\right) \\ &\iff \quad p = a_1(X-1) + a_2(X^2-1) + a_3(X^3-1); \end{aligned}$$

damit ist U genau die Menge der Linearkombinationen von $X - 1$, $X^2 - 1$ und $X^3 - 1$, so daß diese Polynome ein Erzeugendensystem von U bilden. Zum Nachweis ihrer linearen Unabhängigkeit seien $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1(X-1) + \lambda_2(X^2-1) + \lambda_3(X^3-1) = 0;$$

damit gilt

$$\lambda_3X^3 + \lambda_2X^2 + \lambda_1X - (\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_1) = 0,$$

und der Koeffizientenvergleich liefert $\lambda_3 = 0$ (bei X^3), $\lambda_2 = 0$ (bei X^2) und $\lambda_1 = 0$ (bei X). Folglich ist $X - 1$, $X^2 - 1$, $X^3 - 1$ eine Basis von U.

32. a) Wir weisen anhand der Definition nach, daß die Matrizen

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Matrizenraums $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bilden:

- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt die Gestalt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22} \in \mathbb{R}$ und ist damit eine Linearkombination

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot E_{11} + a_{12} \cdot E_{12} + a_{21} \cdot E_{21} + a_{22} \cdot E_{22}$$

  der Matrizen $E_{11},\ E_{12},\ E_{21},\ E_{22}$; folglich sind $E_{11},\ E_{12},\ E_{21},\ E_{22}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

- Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \cdot E_{11} + \lambda_2 \cdot E_{12} + \lambda_3 \cdot E_{21} + \lambda_4 \cdot E_{22} = 0;$$
damit ist aber
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
die Nullmatrix, und der Koeffizientenvergleich liefert $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_4 = 0$. Folglich sind E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} linear unabhängig.

Völlig analog läßt sich nachweisen, daß die entsprechend definierten Matrizen $E_{11}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{m1}, \ldots, E_{mn}$ eine Basis von $\mathbb{R}^{m \times n}$ für $m, n \in \mathbb{N}$ bilden.

b) Für die Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
gilt:

- Wegen
$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{3}\,(A_1 + A_2 + A_3 - 2\,A_4) \in \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle, \\ E_{12} &= \frac{1}{3}\,(A_1 + A_2 - 2\,A_3 + A_4) \in \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle, \\ E_{21} &= \frac{1}{3}\,(A_1 - 2\,A_2 + A_3 + A_4) \in \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle, \\ E_{22} &= \frac{1}{3}\,(-2\,A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \in \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle \end{aligned}$$
gilt
$$\mathbb{R}^{2 \times 2} = \langle E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \rangle \subseteq \langle A_1, A_2, A_3, A_4 \rangle,$$
und damit bilden A_1, A_2, A_3, A_4 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit
$$\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 + \lambda_3 \cdot A_3 + \lambda_4 \cdot A_4 = 0$$
und damit
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$
der Koeffizientenvergleich liefert
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0,$$
woraus
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4) + (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = 0,$$
also
$$3\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0,$$
und damit $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_1 = 0$ folgt. Damit sind A_1, A_2, A_3, A_4 linear unabhängig.

Insgesamt bilden also auch A_1, A_2, A_3, A_4 eine Basis von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.