MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 7
02.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Wir weisen anhand des Unterraumkriteriums nach, daß die Teilmengen

$$U = \left\{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid B^\top = B\right\} \qquad \text{und} \qquad W = \left\{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid B^\top = -B\right\}$$

Unterräume des Vektorraums $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2–Matrizen sind:

- Für die Nullmatrix $0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $0^\top = 0$, also $0 \in U$; für alle B, $C \in U$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $B^\top = B$ und $C^\top = C$, woraus sich

$$(B + C)^\top = B^\top + C^\top = B + C,$$

also $B + C \in U$ sowie

$$(\lambda \cdot B)^\top = \lambda \cdot B^\top = \lambda \cdot B,$$

also $\lambda \cdot B \in U$ ergibt.

- Für die Nullmatrix $0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $0^\top = 0 = -0$, also $0 \in W$; für alle B, $C \in W$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $B^\top = -B$ und $C^\top = -C$, woraus sich

$$(B + C)^\top = B^\top + C^\top = (-B) + (-C) = -(B + C),$$

also $B + C \in W$ sowie

$$(\lambda \cdot B)^\top = \lambda \cdot B^\top = \lambda \cdot (-B) = -(\lambda \cdot B),$$

also $\lambda \cdot B \in W$ ergibt.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine beliebige 2×2–Matrix; für $B = A + A^\top \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$B^\top = \left(A + A^\top\right)^\top = A^\top + \left(A^\top\right)^\top = A^\top + A = A + A^\top = B,$$

also $B = A + A^\top \in U$, und für $C = A - A^\top \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$$C^\top = \left(A - A^\top\right)^\top = A^\top - \left(A^\top\right)^\top = A^\top - A = -\left(A - A^\top\right) = -C,$$

also $C = A - A^\top \in W$.

c) Wir zeigen

$$U \cap W = \{0\} \qquad \text{und} \qquad U + W = \mathbb{R}^{2\times 2}:$$

- Es ist $U \cap W \supseteq \{0\}$; für „$\subseteq$" sei $B \in U \cap W$. Wegen $B \in U$ ist $B^\top = B$, und wegen $B \in W$ ist $B^\top = -B$, woraus sich
$$B = B^\top = -B, \qquad \text{also} \qquad 2 \cdot B = 0,$$
und damit $B = 0$ ergibt. Damit ist $U \cap W = \{0\}$.
- Es ist $U + W \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$; für „$\supseteq$" sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig. Gemäß b) ist
$$A + A^\top \in U \qquad \text{und} \qquad A - A^\top \in W,$$
so daß sich
$$A = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(A + A^\top\right)}_{\in U} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(A - A^\top\right)}_{\in W} \in U + W$$
ergibt. Damit ist $U + W = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

26. Seien $A = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ sowie $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Wegen

$$(A|v) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 1 & 3 & 1 & b_2 \\ 2 & 4 & 1 & b_3 \\ 2 & 1 & 2 & b_4 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{I},\ \text{IV}-2\text{I}}{\overset{\text{II}-\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & -3 & -4 & b_4 - 2\,b_1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\text{IV}+3\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & -10 & b_4 + 3\,b_2 - 5\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{IV}-2\text{III}}{\rightsquigarrow}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - 2\,b_3 + 3\,b_2 - b_1 \end{array}\right)$$

ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = v$ genau dann lösbar, der Vektor v also genau dann Linearkombination von v_1, v_2, v_3, wenn $b_4 - 2\,b_3 + 3\,b_2 - b_1 = 0$ gilt. Damit ist
$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad (-2) - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 - 4 = 0$$
eine Linearkombination der v_1, v_2, v_3, während
$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{wegen} \qquad 4 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 1 = 3 \neq 0$$

keine Linearkombination der v_1, v_2, v_3 ist. Zur Ermittlung der Koeffizienten für die Darstellung von u als Linearkombination der v_1, v_2, v_3 betrachten wir das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = u$: wegen

$$(A|u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ist $x = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die einzige Lösung von $A \cdot x = u$; damit erhält man die (eindeutig bestimmte) Linearkombination

$$u = (-3) \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = -3\, v_1 + 2\, v_2 + v_3.$$

27. a) Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Durchschnitt $U \cap W$ der beiden Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wenn er sowohl Linearkombination von u_1, u_2 als auch Linearkombination von w_1, w_2 ist, wenn es also Koeffizienten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ und μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2}_{x \in U} = v = \underbrace{\mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2}_{x \in W}$$

gibt; dies führt aber zur Beziehung

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \mu_1 \cdot (-w_1) + \mu_2 \cdot (-w_2) = 0,$$

also zum linearen Gleichungssystem

$$A \cdot x = 0 \qquad \text{mit} \qquad A = (u_1, u_2, -w_1, -w_2) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Wegen

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+3\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

erhält man die Lösungen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$, woraus sich

$$\underbrace{(-\alpha) \cdot u_1 + \alpha \cdot u_2}_{v \in U} = v = \underbrace{(-\alpha) \cdot w_1 + \alpha \cdot w_2}_{v \in W}, \qquad \text{also} \qquad v = (-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ergibt. Damit ist

$$U \cap W = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und wir können etwa $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ wählen.

b) Für die beiden gegebenen Unterräume $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die beiden Hilfsmatrizen

$$A_U = (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_W = (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

Wegen

$$(A_U \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 2 & b_2 \\ 3 & 1 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & -8 & b_3 - 3\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-2\text{II}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -4 & b_2 - 2\,b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - 2\,b_2 + b_1 \end{array}\right)$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist also

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - 2\,b_2 + b_3 = 0 \right\},$$

und wegen

$$(A_W \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 5 & 5 & b_2 \\ 6 & 4 & b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}\cdot 2}{\overset{\text{II}\cdot 4}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 20 & 20 & 4\,b_2 \\ 12 & 8 & 2\,b_3 \end{array}\right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-5\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 0 & -10 & 4\,b_2 - 5\,b_1 \\ 0 & -10 & 2\,b_3 - 3\,b_1 \end{array}\right) \underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & b_1 \\ 0 & -10 & 4\,b_2 - 5\,b_1 \\ 0 & 0 & 2\,b_3 - 4\,b_2 + 2\,b_1 \end{array}\right)$$

für alle $b \in \mathbb{R}^3$ ist also

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid b_1 - 2\,b_2 + b_3 = 0 \right\};$$

folglich stimmen U und W überein.

28. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Matrix $J_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, deren Einträge alle gleich 1 sind; es ist also

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

a) Für die beiden $n \times n$–Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{jk})_{j,k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist das Produkt $A \cdot B = (c_{ik})_{i,k} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ über

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \qquad \text{für alle} \quad i, k \in \{1, \dots, n\}$$

erklärt; speziell für $A = J_n$ und $B = J_n$, also $a_{ij} = 1$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $b_{jk} = 1$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$, ergibt sich

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} 1 \cdot 1 = n \cdot 1^2 = n \qquad \text{für alle} \quad i, k \in \{1, \dots, n\}$$

und damit

$$J_n \cdot J_n = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = n \cdot J_n.$$

b) Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist der von E_n und J_n ausgespannte Unterraum

$$U = \langle E_n, J_n \rangle = \{\lambda \cdot E_n + \mu \cdot J_n \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$$

zu betrachten. Für alle A, $B \in U$ gibt es also λ_1, λ_2, μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \lambda_1 \cdot E_n + \mu_1 \cdot J_n \qquad \text{und} \qquad B = \lambda_2 \cdot E_n + \mu_2 \cdot J_n,$$

und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (\lambda_1 \cdot E_n + \mu_1 \cdot J_n) \cdot (\lambda_2 \cdot E_n + \mu_2 \cdot J_n) \\ &= (\lambda_1 \cdot E_n) \cdot (\lambda_2 \cdot E_n + \mu_2 \cdot J_n) + (\mu_1 \cdot J_n) \cdot (\lambda_2 \cdot E_n + \mu_2 \cdot J_n) \\ &= (\lambda_1 \cdot E_n) \cdot (\lambda_2 \cdot E_n) + (\lambda_1 \cdot E_n) \cdot (\mu_2 \cdot J_n) + \\ &\qquad + (\mu_1 \cdot J_n) \cdot (\lambda_2 \cdot E_n) + (\mu_1 \cdot J_n) \cdot (\mu_2 \cdot J_n) \\ &= \lambda_1\,\lambda_2 \cdot (E_n \cdot E_n) + \lambda_1\,\mu_2 \cdot (E_n \cdot J_n) + \\ &\qquad + \mu_1\,\lambda_2 \cdot (J_n \cdot E_n) + \mu_1\,\mu_2 \cdot (J_n \cdot J_n) \\ &= \lambda_1\,\lambda_2 \cdot E_n + \lambda_1\,\mu_2 \cdot J_n + \mu_1\,\lambda_2 \cdot J_n + \mu_1\,\mu_2\,n \cdot J_n \\ &= \underbrace{\lambda_1\,\lambda_2}_{\in\mathbb{R}} \cdot E_n + \underbrace{(\lambda_1\,\mu_2 + \mu_1\,\lambda_2 + \mu_1\,\mu_2\,n)}_{\in\mathbb{R}} \cdot J_n \in U. \end{aligned}$$