MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 6
25.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

21. a) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3. Spalte}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $\det(A) = 1 + t^2 \geq 1$, insbesondere also $\det(A) \neq 0$, und damit A invertierbar.

b) Es ist

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +\det(A'_{11}) & -\det(A'_{21}) & +\det(A'_{31}) & -\det(A'_{41}) \\ -\det(A'_{12}) & +\det(A'_{22}) & -\det(A'_{32}) & +\det(A'_{42}) \\ +\det(A'_{13}) & -\det(A'_{23}) & +\det(A'_{33}) & -\det(A'_{43}) \\ -\det(A'_{14}) & +\det(A'_{24}) & -\det(A'_{34}) & +\det(A'_{44}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

c) Da die Koeffizientenmatrix A des linearen Gleichungssytems $A \cdot x = b$ invertierbar ist, besitzt dieses genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1} \cdot b$. Es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{1+t^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ t^3 & 1+t^2 & -t^2 & -t(1+t^2) \\ -t & 0 & 1 & 0 \\ -t^2 & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 0 \\ 0 \\ t^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man für die Komponenten von x

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{1+t^2}\cdot\begin{vmatrix} t^2+1 & 0 & -t & 0\\ 0 & 1 & 0 & t\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ t^2-1 & 0 & -t & 1\end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} t^2+1 & -t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ t^2-1 & -t & 1\end{vmatrix}\\
&\underset{\text{3. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} t^2+1 & -t\\ 0 & 1\end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\cdot(t^2+1) = 1,\\
x_2 &= \frac{1}{1+t^2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & -t & 0\\ 0 & 0 & 0 & t\\ t & 0 & 1 & 0\\ 0 & t^2-1 & -t & 1\end{vmatrix} \underset{\text{2. Zeile}}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot t\cdot\begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & -t\\ t & 0 & 1\\ 0 & t^2-1 & -t\end{vmatrix}\\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{t}{1+t^2}\cdot\Big(\big(0+0-t^2(t^2-1)\big)-\big(0+(t^2-1)-t^2(t^2+1)\big)\Big) =\\
&= \frac{t}{1+t^2}\cdot\big(-t^4+t^2-t^2+1+t^4+t^2\big) = \frac{t}{1+t^2}\cdot\big(1+t^2\big) = t,\\
x_3 &= \frac{1}{1+t^2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & t^2+1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & t\\ t & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t^2-1 & 1\end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & t^2+1 & 0\\ t & 0 & 0\\ 0 & t^2-1 & 1\end{vmatrix}\\
&\underset{\text{3. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & t^2+1\\ t & 0\end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2}\cdot\big(0-(t^2+1)\,t\big) = -t,\\
x_4 &= \frac{1}{1+t^2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -t & t^2+1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ t & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -t & t^2-1\end{vmatrix} \underset{\text{2. Spalte}}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -t & t^2+1\\ t & 1 & 0\\ 0 & -t & t^2-1\end{vmatrix} =\\
&\underset{\text{Sarrus}}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot\Big(\big((t^2-1)+0-t^2(t^2+1)\big)-\big(0+0-t^2(t^2-1)\big)\Big) =\\
&= \frac{1}{1+t^2}\cdot\big(t^2-1-t^4-t^2+t^4-t^2\big) = \frac{1}{1+t^2}\cdot\big(-1-t^2\big) = -1,
\end{aligned}
$$

und wir erhalten

$$x = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ t\\ -t\\ -1\end{pmatrix}.$$

22. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n \geq 2$ und ihre komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ gilt stets

$$(*) \qquad \widetilde{A}\cdot A = \det(A)\cdot E_n = A\cdot\widetilde{A};$$

damit erhält man:

a) „$\Longrightarrow$“: Ist A invertierbar, so gilt $\det(A) \neq 0$, und aus $(*)$ ergibt sich

$$\frac{1}{\det(A)}\cdot\Big(\widetilde{A}\cdot A\Big) = E_n = \frac{1}{\det(A)}\cdot\Big(A\cdot\widetilde{A}\Big)$$

und damit

$$\widetilde{A} \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot A \right) = E_n = \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot A \right) \cdot \widetilde{A};$$

folglich ist $\widetilde{A}$ invertierbar mit

$$\widetilde{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A.$$

„$\Longleftarrow$“: Ist $\widetilde{A}$ invertierbar, so ergibt sich aus $(*)$

$$\begin{aligned} A = E_n \cdot A = \left(\widetilde{A}^{-1} \cdot \widetilde{A} \right) \cdot A = \widetilde{A}^{-1} \cdot \left(\widetilde{A} \cdot A \right) &= \\ = \widetilde{A}^{-1} \cdot \big(\det(A) \cdot E_n \big) = \det(A) \cdot \left(\widetilde{A}^{-1} \cdot E_n \right) &= \det(A) \cdot \widetilde{A}^{-1}; \end{aligned}$$

Wäre nun A nicht invertierbar, gälte also $\det(A) = 0$, so wäre A schon die Nullmatrix; damit wäre aber auch die komplementäre Matrix $\widetilde{A}$ die Nullmatrix, im Widerspruch zu der vorausgesetzten Invertierbarkeit von $\widetilde{A}$. Folglich muß in diesem Fall A invertierbar sein.

b) Ist A invertierbar, so folgt aus $(*)$ unter Verwendung des Determinantenmultiplikationssatzes

$$\begin{aligned} \det(\widetilde{A}) \cdot \det(A) = \det(\widetilde{A} \cdot A) = \det \big(\det(A) \cdot E_n \big) &= \\ = \begin{vmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \det(A) \end{vmatrix} &\overset{\text{Diagonal–}}{\underset{\text{matrix}}{=}} (\det(A))^n, \end{aligned}$$

woraus sich wegen $\det(A) \neq 0$ dann

$$\det(\widetilde{A}) = \frac{(\det(A))^n}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1}.$$

ergibt. Ist A dagegen nicht invertierbar, so ist gemäß a) auch $\widetilde{A}$ nicht invertierbar, und wir erhalten direkt

$$\det(\widetilde{A}) = 0 = 0^{n-1} = (\det(A))^{n-1}.$$

23. Wir verwenden das Unterraumkriterium, wonach eine Teilmenge U eines Vektorraums V genau dann ein Untervektorraum (linearer Unterraum) von V ist, wenn die folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- Es ist $U \neq \emptyset$; insbesondere muß $0_V \in U$ gelten.
- Für alle $u, w \in U$ gilt $u + w \in U$.
- Für alle $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot u \in U$.

Für die gegebenen Teilmengen im Vektorraum $V = \mathrm{Pol}(\mathbb{R})$ gilt:

- Die Teilmenge

$$U_1 = \big\{ f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X + c \;\text{ mit }\; a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \big\}$$

aller reellen Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ enthält das Nullpolynom

$$f = 0, \qquad \text{also} \qquad f = a\,X^2 + b\,X + c \quad \text{mit} \quad a = b = c = 0;$$

ferner gilt für alle f und $g \in U_1$ mit

$$f = a\,X^2 + b\,X + c \qquad \text{und} \qquad g = a'\,X^2 + b'\,X + c'$$

mit $a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$ und $a',\, b',\, c' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} f + g &= \big(a\,X^2 + b\,X + c\big) + \big(a'\,X^2 + b'\,X + c'\big) \\ &= \big(a\,X^2 + a'\,X^2\big) + (b\,X + b'\,X) + (c + c') \\ &= (a + a')\,X^2 + (b + b')\,X + (c + c') \end{aligned}$$

mit $a + a',\, b + b',\, c + c' \in \mathbb{R}$, also $f + g \in U_1$, und zum anderen

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f &= \lambda \cdot \big(a\,X^2 + b\,X + c\big) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,X^2\big) + \lambda \cdot (b\,X) + \lambda \cdot c \\ &= (\lambda \cdot a)\,X^2 + (\lambda \cdot b)\,X + (\lambda \cdot c) \end{aligned}$$

mit $\lambda \cdot a,\, \lambda \cdot b,\, \lambda \cdot c \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot f \in U_1$. Damit ist U_1 ein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

- Die Teilmenge

$$U_2 = \big\{ f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X \;\text{ mit }\; a,\, b \in \mathbb{R} \big\}$$

aller Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ und konstantem Glied $c = 0$ enthält das Nullpolynom

$$f = 0, \qquad \text{also} \qquad f = a\,X^2 + b\,X \quad \text{mit} \quad a = b = 0;$$

ferner gilt für alle f und $g \in U_2$ mit

$$f = a\,X^2 + b\,X \qquad \text{und} \qquad g = a'\,X^2 + b'\,X$$

mit $a,\, b \in \mathbb{R}$ und $a',\, b' \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\begin{aligned} f + g &= \big(a\,X^2 + b\,X\big) + \big(a'\,X^2 + b'\,X\big) \\ &= \big(a\,X^2 + a'\,X^2\big) + (b\,X + b'\,X) \\ &= (a + a')\,X^2 + (b + b')\,X \end{aligned}$$

mit $a + a',\, b + b' \in \mathbb{R}$, also $f + g \in U_2$, und zum anderen

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f &= \lambda \cdot \big(a\,X^2 + b\,X\big) \\ &= \lambda \cdot \big(a\,X^2\big) + \lambda \cdot (b\,X) \\ &= (\lambda \cdot a)\,X^2 + (\lambda \cdot b)\,X \end{aligned}$$

mit $\lambda \cdot a,\, \lambda \cdot b \in \mathbb{R}$, also $\lambda \cdot f \in U_2$. Damit ist U_2 ein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

- Die Teilmenge
$$U_3 = \{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = 0 \ \text{ oder } \ \mathrm{Grad}(f) \geq 2\}$$
enthält neben dem Nullpolynom $f = 0$ alle Polynome f vom $\mathrm{Grad}(f) \geq 2$, insbesondere also auch die beiden Polynome
$$f = -X^2 + X \qquad \text{und} \qquad g = X^2 + 1,$$
wegen
$$f + g = \left(-X^2 + X\right) + \left(X^2 + 1\right) = X + 1$$
mit $\mathrm{Grad}(f + g) = 1$ aber nicht deren Summe $f + g$. Damit ist U_3 kein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.
- Die Teilmenge
$$U_4 = \left\{f \in \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \mid f = a\,X^2 + b\,X + c \ \text{ mit } \ a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ c \neq 0\right\}$$
aller Polynome f mit $\mathrm{Grad}(f) \leq 2$ und konstantem Glied $c \neq 0$ enthält insbesondere nicht das Nullpolynom $f = 0$. Damit ist U_4 kein Unterraum von $\mathrm{Pol}(\mathbb{R})$.

24. a) Die Teilmenge $M = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid \det(A) = 0\}$ ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$; wir weisen dies anhand eines Gegenbeispiels nach: für die beiden Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
gilt wegen $\det(A_1) = 0$ und $\det(A_2) = 0$ zwar $A_1 \in M$ und $A_2 \in M$, für ihre Summe
$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$
ergibt sich wegen $\det(A_1 + A_2) = 1 \neq 0$ jedoch $A_1 + A_2 \notin M$; damit ist M bezüglich $+$ nicht abgeschlossen, insbesondere kein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
Die Teilmenge $N = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = -A\right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$; wir weisen dies mit Hilfe des Unterraumkriteriums nach:
  - Für die Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $O^\top = O = -O$; damit ist $O \in N$.
  - Für alle $A_1,\, A_2 \in N$ ist $A_1,\, A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A_1^\top = -A_1$ und $A_2^\top = -A_2$, und für $A_1 + A_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ergibt sich
$$(A_1 + A_2)^\top = A_1^\top + A_2^\top = (-A_1) + (-A_2) = -(A_1 + A_2);$$
damit ist $A_1 + A_2 \in N$.
  - Für alle $A \in N$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^\top = -A$, und für $\lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ergibt sich
$$(\lambda \cdot A)^\top = \lambda \cdot A^\top = \lambda \cdot (-A) = -(\lambda \cdot A);$$
damit ist $\lambda \cdot A \in N$.

b) Es ist $M \not\subseteq N$: es gilt nämlich für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

zum einen $\det(A) = 0$, also $A \in M$, und zum anderen

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -A,$$

also $A \notin N$.
Es ist $N \subseteq M$: für alle $A \in N$ gilt nämlich $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A^\top = -A$, woraus

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) \underset{A\in\mathbb{R}^{3\times 3}}{=} (-1)^3 \cdot \det(A) = -\det(A)$$

und damit $2 \cdot \det(A) = 0$ bzw. $\det(A) = 0$ folgt; damit ist $A \in M$.