Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

17. a) Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Damit enthält die zur gegebenen Matrix M_α zeilenäquivalente Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

für $\alpha = 0$ in der ersten Zeile eine Nullzeile sowie für $\alpha = 1$ in der zweiten und dritten Zeile jeweils eine Nullzeile und ist damit in diesen Fällen insbesondere nicht invertierbar; folglich ist aber auch M_α für $\alpha \in \{0, 1\}$ nicht invertierbar. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ergibt sich ferner

$$\begin{aligned}
(M_\alpha \mid E_3) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\frac{1}{\alpha-1}\cdot\mathrm{III}}{\overset{\frac{1}{\alpha}\cdot\mathrm{I},\ \frac{1}{1-\alpha}\cdot\mathrm{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{array}\right) = (E_3 \mid M'_\alpha);
\end{aligned}$$

damit ist M_α invertierbar, und für ihre Inverse gilt

$$M_\alpha^{-1} = M'_\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

b) Wegen

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} \left(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2\right) - \left(\alpha^2 + \alpha + \alpha^3\right) =$$

$$= 2\,\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 = -\alpha\left(\alpha^2 - 2\,\alpha + 1\right) = -\alpha\,(\alpha-1)^2$$

ist die Matrix M_α genau dann invertierbar, wenn

$$\det(M_\alpha) = -\alpha\,(\alpha-1)^2 \neq 0, \qquad \text{also} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,,$$

gilt, und in diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} M_\alpha^{-1} &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \widetilde{M_\alpha} \\ &= \frac{1}{\det(M_\alpha)} \cdot \begin{pmatrix} +\det(M'_{11}) & -\det(M'_{21}) & +\det(M'_{31}) \\ -\det(M'_{12}) & +\det(M'_{22}) & -\det(M'_{32}) \\ +\det(M'_{13}) & -\det(M'_{23}) & +\det(M'_{33}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-\alpha\,(\alpha-1)^2} \cdot \begin{pmatrix} \alpha-1 & -\alpha(\alpha-1) & 0 \\ -\alpha(\alpha-1) & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & -\alpha(\alpha-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha(\alpha-1)} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 \\ \frac{1}{\alpha-1} & 0 & -\frac{1}{\alpha-1} \\ 0 & -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

18. Die gegebene Matrix $A_n = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j+1 \text{ oder } i = j-1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

besitzt die Gestalt

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für den Induktionsanfang erhalten wir

- für „$n = 1$“ ist $A_1 = (0)$, also $\det(A_1) = 0$, und
- für „$n = 2$“ ist $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\det(A_2) = 0 - 1 = -1 = (-1)^{\frac{2}{2}}$.

Für den Induktionsschritt „$n-1 \to n$“ mit $n \geq 3$ erhalten wir ferner mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes

$$\begin{aligned}
\det(A_n) \quad &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & & \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{1. Zeile}}{=} \quad (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_{n-2} & \\ 0 & & & & \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{1. Spalte}}{=} \quad (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det(A_{n-2}) = -\det(A_{n-2}).
\end{aligned}$$

- Ist nun n ungerade, so ist auch $n-2$ ungerade, und wir erhalten mit der Induktionsvoraussetzung
$$\det(A_n) = -\det(A_{n-2}) = 0.$$
- Ist nun n gerade, so ist auch $n-2$ gerade, und wir erhalten mit der Induktionsvoraussetzung
$$\det(A_n) = -\det(A_{n-2}) = (-1) \cdot (-1)^{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{\frac{n-2}{2}+1} = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

19. Wir zeigen die Aussage
$$A(n) \quad : \quad \text{„Für alle } x,\, y \in \mathbb{R}^n \text{ gilt:} \quad \det\left(E_n + x \cdot y^\top\right) = 1 + x^\top \cdot y.\text{“}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit vollständiger Induktion; für $x = (x_i)_i$, $y = (y_i)_i \in \mathbb{R}^n$ ist dabei
$$E_n + x \cdot y^\top = \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
sowie
$$1 + x^\top \cdot y = 1 + x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \in \mathbb{R}.$$

Für „$n = 2$“ ergibt sich für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^2$ direkt

$$\begin{aligned}
\det\left(E_2 + x \cdot y^\top\right) &= \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 \end{vmatrix} \\
&= (1 + x_1y_1) \cdot (1 + x_2y_2) - x_1y_2 \cdot x_2y_1 \\
&= (1 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_1y_1x_2y_2) - x_1y_1x_2y_2 \\
&= 1 + x_1y_1 + x_2y_2 = 1 + x^\top \cdot y.
\end{aligned}$$

Für „$n \to n + 1$“ gilt für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ zunächst

$$\begin{aligned}
\det\left(E_{n+1} + x \cdot y^\top\right) &= \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n & x_1y_{n+1} \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n & x_2y_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n & x_ny_{n+1} \\ x_{n+1}y_1 & x_{n+1}y_2 & \dots & x_{n+1}y_n & 1 + x_{n+1}y_{n+1} \end{vmatrix} = \\
&= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n & x_1y_{n+1} \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n & x_2y_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n & x_ny_{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=\delta_1} + \\
&\qquad + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n & x_1y_{n+1} \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n & x_2y_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n & x_ny_{n+1} \\ x_{n+1}y_1 & x_{n+1}y_2 & \dots & x_{n+1}y_n & x_{n+1}y_{n+1} \end{vmatrix}}_{=\delta_2},
\end{aligned}$$

wobei man unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\delta_1 &\underset{(n+1)\text{-te Zeile}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} \underbrace{(-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot 1}_{=1} \cdot \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix} \\
&= 1 + x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n
\end{aligned}$$

erhält; ferner ergibt sich

$$\delta_2 \overset{x_{n+1}\text{ aus}}{\underset{(n+1)\text{-ter Zeile}}{=}} x_{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n & x_1y_{n+1} \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n & x_2y_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n & x_ny_{n+1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$\underset{(*)}{=} x_{n+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & y_{n+1} \end{vmatrix} \overset{\text{Dreiecks-}}{\underset{\text{matrix}}{=}} x_{n+1} \cdot y_{n+1},$$

wobei in $(*)$ jeweils das x_k–fache der $(n+1)$–ten Zeile von der k–ten Zeile für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ abgezogen wird. Zusammen ergibt sich in

$$\det\left(E_{n+1} + x \cdot y^\top\right) = \underbrace{1 + x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}_{=\delta_1} + \underbrace{x_{n+1}y_{n+1}}_{=\delta_2} = 1 + x^\top \cdot y$$

die Induktionsbehauptung.

20. Der Nachweis, daß $(M, \cdot)$ und $(N, \cdot)$ mit

$$M = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \cdot A^\top = E_n\right\} \quad \text{und} \quad N = \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) = \pm 1\right\}.$$

Gruppen sind, erfolgt analog zu Satz 2.14 der Vorlesung, wonach $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ eine (für $n \geq 2$ nichtabelsche) Gruppe bildet:

- Für alle A, B, $C \in M$ gilt:
  - Wegen $A \cdot A^\top = E_n$ und $B \cdot B^\top = E_n$ ergibt sich

    $$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^\top = A \cdot \underbrace{B \cdot B^\top}_{=E_n} \cdot A^\top = A \cdot A^\top = E_n,$$

    also $A \cdot B \in M$; damit ist $\cdot$ eine innere Verknüpfung auf M.
  - Es ist $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; damit ist $\cdot$ assoziativ.
  - Wegen $E_n \cdot E_n^\top = E_n \cdot E_n = E_n$ ist $E_n \in M$, mit $A \cdot E_n = A = E_n \cdot A$; damit ist E_n bezüglich $\cdot$ das neutrale Element.
  - Wegen $A \cdot A^\top = E_n$ ist A invertierbar mit $A^{-1} = A^\top$, und es gilt

    $$A^{-1} \cdot (A^{-1})^\top = A^\top \cdot (A^{-1})^\top = (A^{-1} \cdot A)^\top = E_n^\top = E_n;$$

    damit ist $A^{-1} \in M$ mit $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$, also ist A^{-1} das zu A bezüglich $\cdot$ inverse Element.

  Damit ist $(M, \cdot)$ eine Gruppe.
- Für alle A, B, $C \in N$ gilt:

– Wegen $\det(A) = \pm 1$ und $\det(B) = \pm 1$ ergibt sich

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = (\pm 1) \cdot (\pm 1) = \pm 1,$$

also $A \cdot B \in N$; damit ist $\cdot$ eine innere Verknüpfung auf N.
– Es ist $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$; damit ist $\cdot$ assoziativ.
– Wegen $\det(E_n) = 1$ ist $E_n \in N$, mit $A \cdot E_n = A = E_n \cdot A$; damit ist E_n bezüglich $\cdot$ das neutrale Element.
– Wegen $\det(A) = \pm 1$ und damit $\det(A) \neq 0$ ist A invertierbar mit

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\pm 1} = \pm 1;$$

damit ist $A^{-1} \in N$ mit $A \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A$, also ist A^{-1} das zu A bezüglich $\cdot$ inverse Element.

Damit ist $(N, \cdot)$ eine Gruppe.

Wir zeigen nun noch die beiden echten Inklusionen $M \subsetneq N$ und $N \subsetneq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

- Für alle $A \in M$ gilt $A \cdot A^\top = E_n$, woraus mit dem Determinantenmultiplikationssatz

$$1 = \det(E_n) = \det(A \cdot A^\top) = \det(A) \cdot \underbrace{\det(A^\top)}_{=\det(A)} = (\det(A))^2$$

  und damit $\det(A) = \pm 1$, also $A \in N$, folgt; damit ist $M \subseteq N$. Für die Matrix

$$A = \mathrm{diag}(2, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

  gilt zum einen

$$\det(A) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1, \qquad \text{also} \quad A \in N,$$

  und zum anderen

$$A \cdot A^\top = \mathrm{diag}(4, \tfrac{1}{4}, 1, \ldots, 1) \neq E_n, \qquad \text{also} \quad A \notin M;$$

  damit ist $M \subsetneq N$.
- Für alle $A \in N$ gilt $\det(A) = \pm 1$, so daß A wegen $\det(A) \neq 0$ invertierbar ist, es gilt also $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; damit ist $N \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Für die Matrix

$$A = \mathrm{diag}(2, 1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

  gilt $\det(A) = 2 \cdot 1^{n-1} = 2$ und damit zum einen

$$\det(A) \neq 0, \qquad \text{also} \quad A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),$$

  und zum anderen

$$\det(A) \neq 1, \qquad \text{also} \quad A \notin N;$$

  damit ist $N \subsetneq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.