Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

13. a) Mit Hilfe der Regel von Sarrus erhalten wir

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} =$$
$$= (1\cdot 5\cdot 8 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8) - (2\cdot 4\cdot 8 + 1\cdot 6\cdot 8 + 3\cdot 5\cdot 7) =$$
$$= (40 + 84 + 96) - (64 + 48 + 105) = 220 - 217 = 3$$

sowie mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{3 aus III}}{\overset{\text{2 aus II}}{=}} 2\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\text{I}}{\overset{\text{III}-\text{I}}{=}}$$
$$= 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}+2\cdot\text{I}}{\overset{\text{III}+2\cdot\text{I}}{=}} 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{IV}-\text{III}}{=}$$
$$= 6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} 6\cdot(1\cdot 1\cdot 4\cdot 4) = 96$$

und

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{III}-7\text{II}}{=}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrix}}{\overset{\text{Dreiecks-}}{=}} (-1)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = -1.$$

b) Mit Hilfe des Determinantenmultiplikationssatzes sowie der Rechenregeln für die Determinante ergibt sich ferner

- $\det(\frac{1}{3}A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det(A) = \frac{1}{27} \cdot 3 = \frac{1}{9}$,
- $\det(B^{-1}B^\top) = \det(B^{-1}) \cdot \det(B^\top) = \frac{1}{\det(B)} \cdot \det(B) = \frac{1}{96} \cdot 96 = 1$ und
- $\det(CBC^{-1}) = \det(C) \cdot \det(B) \cdot \det(C^{-1}) = \det(C) \cdot \det(B) \cdot \frac{1}{\det(C)} =$ $= \det(C) \cdot \frac{1}{\det(C)} \cdot \det(B) = \det(B) = 96$.

14. a) Wegen

$$\det(A_t) = \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{=} \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -t+2 & t-2 & 0 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \underset{(t-2)\text{ aus II}}{=}$$

$$= (t-2) \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & -6 & t+4 \end{vmatrix} \underset{\text{III}+6\text{II}}{=} (t-2) \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t+4 \end{vmatrix} \underset{(t+4)\text{ aus III}}{=}$$

$$= (t-2) \cdot (t+4) \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{Sarrus}}{=} (t-2) \cdot (t+4) \cdot (t+2)$$

ist die Matrix A_t genau für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2\}$ invertierbar und in diesen Fällen ist $\det(A_t^{-1}) = \frac{1}{\det(A_t)} = \frac{1}{(t-2)\cdot(t+4)\cdot(t+2)}$.

b) Für $t = 1$ ist gemäß a) die Matrix A_1 invertierbar und es ist $\det(A_1) = -15$ sowie $\det(A_1^{-1}) = \frac{1}{\det(A_1)} = -\frac{1}{15}$. Für jede Matrix B bzw. $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt nach dem Determinantenmultiplikationsatz

$$\det\left(B^{10}\right) = (\det(B))^{10} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \det\left(C^{10}\right) = (\det(C))^{10} \geq 0;$$

damit können wegen $\det(A_1) = -15 < 0$ und $\det(A_1^{-1}) = -\frac{1}{15} < 0$ keine Matrizen B bzw. $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $B^{10} = A_1$ bzw. $C^{10} = A_1^{-1}$ existieren.

15. a) Zunächst besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $A\,x = 0$ wegen

$$(A \mid 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II}-4\text{I}}{\underset{\text{III}-\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{I}-\text{II}}{\underset{\text{III}-\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

genau die Lösungen $x \in \mathbb{R}^3$ mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig sowie

- $x_2 + 2\,x_3 = 0$, also $x_2 = -2\,x_3 = -2\,\lambda$, und
- $x_1 - x_3 = 0$, also $x_1 = x_3 = \lambda$,

folglich also die Lösungsmenge

$$L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\,\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für eine Matrix $B = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit den Spalten $s_1,\ s_2,\ s_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
AB = O \quad &\iff \quad A\,(s_1, s_2, s_3) = (0,0,0) \\
&\iff \quad (As_1, As_2, As_3) = (0,0,0) \\
&\iff \quad As_1 = 0 \ \text{ und } \ As_2 = 0 \ \text{ und } \ As_3 = 0 \\
&\iff \quad s_1 \in L_0 \ \text{ und } \ s_2 \in L_0 \ \text{ und } \ s_3 \in L_0 \\
&\iff \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \ \text{ mit } \ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = O$ besitzt gemäß a) die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

mit $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$; damit gilt

$$\begin{aligned}
BA \ &= \ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ -2\,\alpha & -2\,\beta & -2\,\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \ \begin{pmatrix} \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \\ -2\,\alpha - 8\,\beta - 2\,\gamma & -4\,\alpha - 10\,\beta - 2\,\gamma & -6\,\alpha - 12\,\beta - 2\,\gamma \\ \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \end{pmatrix} \\
&= \ \begin{pmatrix} \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \\ -2\,(\alpha + 4\,\beta + \gamma) & -2\,(2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma) & -2\,(3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma) \\ \alpha + 4\,\beta + \gamma & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
BA = O \quad &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rrcl} \text{(I)} & \alpha + 4\,\beta + \gamma & = & 0 \\ \text{(II)} & 2\,\alpha + 5\,\beta + \gamma & = & 0 \\ \text{(III)} & 3\,\alpha + 6\,\beta + \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{III}-3\text{I}}{\overset{\text{II}-2\text{I}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{array} \right) \underset{\text{III}-2\text{II}}{\overset{\text{I}+\frac{4}{3}\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

können wir etwa

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{O\}$$

wählen.

16. a) Es ist

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda) - a_{12}\,a_{21} =$$
$$= a_{11}\,a_{22} - a_{11}\,\lambda - \lambda\,a_{22} + \lambda^2 - a_{12}\,a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + \det(A)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}\,a_{21} & a_{11}\,a_{12} + a_{12}\,a_{22} \\ a_{21}\,a_{11} + a_{22}\,a_{21} & a_{21}\,a_{12} + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot A + \det(A) \cdot E =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}\,a_{21} & a_{11}\,a_{12} + a_{12}\,a_{22} \\ a_{11}\,a_{21} + a_{21}\,a_{22} & a_{12}\,a_{21} + a_{22}^2 \end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{11}\,a_{22} & a_{11}\,a_{12} + a_{12}\,a_{22} \\ a_{11}\,a_{21} + a_{21}\,a_{22} & a_{11}\,a_{22} + a_{22}^2 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

c) Die quadratische Funktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = x^2 - (a_{11} + a_{22})\,x + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,,$$

besitzt die Diskriminante

$$\Delta = (a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

und damit keine bzw. eine bzw. zwei Nullstellen, wenn $\Delta < 0$ bzw. $\Delta = 0$ bzw. $\Delta > 0$ ist; wir geben möglichst einfache Beispiele an:

- Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$; damit besitzt p keine Nullstelle.
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$; damit besitzt p die doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 1$.
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$; damit besitzt p die beiden einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

d) Für eine symmetrische Matrix A ist $a_{12} = a_{21}$. Damit gilt für die Diskriminante Δ von p

$$\Delta = (-(a_{11} + a_{22}))^2 - 4\left(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2\right) =$$
$$= a_{11}^2 + 2\,a_{11}\,a_{22} + a_{22}^2 - 4\,a_{11}\,a_{22} + 4\,a_{12}^2 =$$
$$= a_{11}^2 - 2\,a_{11}\,a_{22} + a_{22}^2 + 4\,a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2;$$

wegen $\Delta \geq 0$ besitzt p mindestens eine Nullstelle.

p besitzt genau dann eine doppelte Nullstelle, wenn $\Delta = 0$ gilt; dies ist aber genau dann der Fall, wenn $a_{11} = a_{22}$ und $a_{12} = 0$ gilt. Für eine symmetrische Matrix A besitzt demnach p genau dann eine doppelte Nullstelle, wenn $A = a_{11} \cdot E_2$ ist.