Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

9. Es ist

$$
(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{I, II, III}\cdot 5}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{II}-2\text{II}}{\sim}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{III}+\frac{2}{3}\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{20}{3} & \frac{10}{3} & 5 \end{array}\right) \underset{\text{III}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{\sim}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \underset{\text{II}+4\text{III}}{\overset{\text{I}-2\text{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \underset{\text{I}+\text{II}}{\sim}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) \underset{\text{II}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right) = (E_3|A')
$$

Damit ist A invertierbar mit

$$
A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.
$$

Es ist

$$
B = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{4}{9} & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}\cdot 9,\text{III}\cdot 9}{\overset{\text{I}\cdot 14}{\sim}} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 12 \\ 6 & 3 & 12 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{II}-\text{I}}{\sim}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 6 & -2 & 12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{III}+\frac{4}{5}\cdot\text{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 12 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1.
$$

Da die dritte Zeile von B_1 Null ist, kann die Matrix B_1 nicht invertierbar sein; damit ist auch die zu B_1 zeilenäquivalente Matrix B nicht invertierbar.

Es ist

$$
\begin{aligned}
(C|E_4) \quad &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-\mathrm{I};\ \mathrm{IV}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{III}+2\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{II}-2\mathrm{IV}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \\
&\underset{\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \\
&= \quad (E_4|C')\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist C invertierbar mit

$$
C^{-1} = C' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.
$$

10. Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$
(A_t|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim}}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & t-1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-5 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)
$$

Für $t = 5$ ist A_5 also zu der (wegen ihrer Nullzeile nicht invertierbaren) Matrix

$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ zeilenäquivalent und damit selbst nicht invertierbar. Für $t \neq 5$ gilt

$$(A_t|E_3) \underset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{t-5}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&2&-1&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{t-5}&-\frac{2}{t-5}&\frac{1}{t-5}\end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-2\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}+\mathrm{III}}{\sim}}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2t-9}{t-5}&-\frac{t-3}{t-5}&\frac{1}{t-5}\\0&1&0&-\frac{t-3}{t-5}&\frac{t-1}{t-5}&-\frac{2}{t-5}\\0&0&1&\frac{1}{t-5}&-\frac{2}{t-5}&\frac{1}{t-5}\end{array}\right) = (E_3|A_t');$$

also ist A_t für $t \neq 5$ invertierbar mit $A_t^{-1} = A_t' = \begin{pmatrix}\frac{2t-9}{t-5}&-\frac{t-3}{t-5}&\frac{1}{t-5}\\-\frac{t-3}{t-5}&\frac{t-1}{t-5}&-\frac{2}{t-5}\\\frac{1}{t-5}&-\frac{2}{t-5}&\frac{1}{t-5}\end{pmatrix}$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$(B_t|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\0&1&t&0&0&1\end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&1&0\\0&1&t&0&0&1\end{array}\right) \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&t&0&0&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-t\cdot\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&t&-t&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-\mathrm{II}}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1-t&t&-1\\0&1&0&t&-t&1\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right) = (E_3|B_t')$$

Damit ist B_t für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar mit $B_t^{-1} = B_t' = \begin{pmatrix}1-t&t&-1\\t&-t&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(C_t|E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&t&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\t&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \underset{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\0&1&t&0&0&1&0&0\\t&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\underset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\overset{\mathrm{IV}-t\cdot\mathrm{I}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&1&0\\0&0&t-1&0&0&1&-1&0\\0&0&0&1-t&-t&0&0&1\end{array}\right)$$

Für $t = 1$ ist C_1 also zu der (wegen ihrer beiden Nullzeilen sicherlich nicht invertierbaren) Matrix $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ zeilenäquivalent und folglich selbst nicht invertierbar. Für $t \neq 1$ gilt

$$(C_t|E_4) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & -t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{IV}\cdot\frac{1}{1-t}}{\overset{\mathrm{III}\cdot\frac{1}{t-1}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} & -\frac{1}{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{t-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-\mathrm{IV}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} & \frac{t}{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} & -\frac{1}{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{t-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} \end{array}\right) = (E_4|C_t');$$

also ist C_t für $t \neq 1$ invertierbar mit $C_t^{-1} = C_t' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t-1} & 0 & 0 & \frac{1}{t-1} \\ 0 & -\frac{1}{t-1} & \frac{t}{t-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t-1} & -\frac{1}{t-1} & 0 \\ \frac{t}{t-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{t-1} \end{pmatrix}$.

11. a) Es ist

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}+\mathrm{II}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathrm{III}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \underset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right) = (E_3|A').$$

Damit ist A invertierbar mit

$$A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Die invertierbare Matrix A ist Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen. Wir erhalten gemäß den elementaren Zeilenumformungen aus a)

$$F_6 \cdot (F_5 \cdot (F_4 \cdot (F_3 \cdot (F_2 \cdot (F_1 \cdot A))))) = E_3$$

mit den Elementarmatrizen

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$A = ((((F_1^{-1} \cdot F_2^{-1}) \cdot F_3^{-1}) \cdot F_4^{-1}) \cdot F_5^{-1}) \cdot F_6^{-1}$$

mit den inversen Elementarmatrizen

$$F_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. a) Für alle A, B, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:
   - Reflexivität: Mit $S = E_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt $S^{-1}AS = E_n^{-1}AE_n = A$; damit gilt $(A, A) \in R$.
   - Symmetrie: Sei $(A, B) \in R$; damit gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = B$, also $A = (S^{-1})^{-1}BS^{-1}$. Mit $T = S^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt also $T^{-1}BT = A$ und damit $(B, A) \in R$.
   - Transitivität: Seien $(A, B) \in R$ und $(B, C) \in R$; damit gibt es Matrizen S, $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = B$ und $T^{-1}BT = C$, zusammen also $C = T^{-1}(S^{-1}AS)T = (ST)^{-1}A(ST)$. Mit $Q = ST \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ gilt also $Q^{-1}AQ = C$ und damit $(A, C) \in R$.

   Folglich ist R eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^{n \times n}$.

   b) Es ist $\lambda \cdot E_n \in \overline{\lambda \cdot E_n}$. Für alle $B \in \overline{\lambda \cdot E_n}$ gilt $(\lambda \cdot E_n, B) \in R$, es gibt also eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}(\lambda \cdot E_n)S = B$. Damit ergibt sich $B = \lambda \cdot (S^{-1}E_nS) = \lambda \cdot (S^{-1}S) = \lambda \cdot E_n$. Folglich gilt $\overline{\lambda \cdot E_n} = \{\lambda \cdot E_n\}$.

   c) Wir nehmen zum Widerspruch $(A, B) \in R$ an; dann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = B$. Da A wegen

$$(A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_3|A')$$

invertierbar ist, muß auch $B = S^{-1}AS$ als Produkt invertierbarer Matrizen selbst invertierbar sein; da die dritte Zeile von B Null ist, kann B aber nicht invertierbar sein, Widerspruch! Damit gilt also $(A, B) \notin R$.