Übungen zur Vorlesung
„Lineare Algebra und analytische Geometrie I“
— Lösungsvorschlag —

5. a) Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|0)$; dabei ergibt sich

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}+3\text{I},\ \text{IV}+4\text{I}}{\overset{\text{II}+2\text{I}}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{7}\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\underset{\text{III}-16\text{II},\ \text{IV}-18\text{II}}{\overset{\text{I}-5\text{II}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit sind die beiden Variablen x_3 und x_4 frei, so daß man mit $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ beliebig

- $x_2 + x_3 - x_4 = 0$, also $x_2 = -x_3 + x_4 = -\lambda + \mu$, und
- $-x_1 - x_3 - x_4 = 0$, also $x_1 = -x_3 - x_4 = -\lambda - \mu$,

und folglich die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda - \mu \\ -\lambda + \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

erhält.

b) Mit den unter a) für das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ durchgeführten Umformungen ergibt sich etwa für die rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

dann

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 16 & 16 & -16 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -18 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

wegen des Pivots in der letzten Spalte ist das durch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar.

6. a) Es ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $C \in \mathbb{R}^{2\times 4}$. Das Produkt zweier Matrizen ist genau dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt. Daher lassen sich die folgenden Produkte bilden:

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 6 & -8 & -22 \\ 17 & 15 & 13 & 11 \\ -33 & -9 & 15 & 39 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 27 \\ -10 & 5 \\ -27 & 25 \\ 23 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$$

und

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 46 & 0 \\ 54 & 44 & -18 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

b) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

sowie

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & -16 \\ -4 & 5 & 11 \\ -27 & 16 & 47 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A^3 - 5\,A^2 + 4\,A + E =$$
$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & -16 \\ -4 & 5 & 11 \\ -27 & 16 & 47 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -7 & 4 & 12 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & -16 \\ -4 & 5 & 11 \\ -27 & 16 & 47 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & -5 & -20 \\ 0 & 10 & 15 \\ -35 & 20 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \\ -8 & 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Es ist also $A^3 - 5\,A^2 + 4\,A + E$ die Nullmatrix 0.

7. a) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\delta \cdot E_2 - s \cdot A + A^2 =$$
$$= (ad - bc) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (a + d) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ad - bc - a^2 - ad + a^2 + bc & -ab - bd + ab + bd \\ -ac - cd + ac + cd & ad - bc - ad - d^2 + bc + d^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

b) Für „$\Longleftarrow$“ gilt im Falle $s = 0$ und $\delta = -1$ mit Hilfe von a)

$$0 = \delta \cdot E_2 - s \cdot A + A^2 = -E_2 + A^2, \qquad \text{also} \quad A^2 = E_2,$$

und im Falle $b = c = 0$ und $a^2 = d^2 = 1$ gemäß der Rechnung von a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Für „$\Longrightarrow$“ wird $A^2 = E_2$ vorausgesetzt; im Falle $s = 0$ ergibt sich mit Hilfe von a)

$$0 = \delta \cdot E_2 - s \cdot A + A^2 = \delta \cdot E_2 + E_2 = (\delta + 1) \cdot E_2, \qquad \text{also} \quad \delta = -1,$$

und im Falle $s = a + d \neq 0$ erhält man gemäß der Rechnung von a)

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also zunächst $b = c = 0$ in der Nebendiagonale und danach $a^2 = d^2 = 1$ in der Hauptdiagonale.

8. a) Wir weisen jeweils die Äquivalenz der Aussagen (i), (ii) und (iii) zur Aussage (iv) nach. Für „(i) $\iff$ (iv)" gilt

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot(A+B)+B\cdot(A+B) = A^2+A\,B+B\,A+B^2$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &\iff \quad (A+B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2 \\ &\iff \quad A^2 + A\,B + B\,A + B^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2 \\ &\underset{-A^2,-AB,-B^2}{\iff} \quad B\,A = A\,B \quad \iff \quad \text{(iv)}. \end{aligned}$$

Für „(ii) $\iff$ (iv)" gilt analog

$$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A\cdot(A-B)-B\cdot(A-B) = A^2-A\,B-B\,A+B^2$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad &\iff \quad (A-B)^2 = A^2 - 2\,A\,B + B^2 \\ &\iff \quad A^2 - A\,B - B\,A + B^2 = A^2 - 2\,A\,B + B^2 \\ &\underset{-A^2,+AB,-B^2}{\iff} \quad -B\,A = -A\,B \\ &\iff \quad B\,A = A\,B \quad \iff \quad \text{(iv)}. \end{aligned}$$

Für „(iii) $\iff$ (iv)" gilt schließlich

$$(A+B)\cdot(A-B) = A\cdot(A-B)+B\cdot(A-B) = A^2 - A\,B + B\,A + B^2$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad &\iff \quad (A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2 \\ &\iff \quad A^2 - A\,B + B\,A - B^2 = A^2 - B^2 \\ &\underset{-A^2,+B^2}{\iff} \quad -A\,B + B\,A = 0 \\ &\iff \quad B\,A = A\,B \quad \iff \quad \text{(iv)}. \end{aligned}$$

b) Aufgrund der bereits unter a) nachgewiesenen Äquivalenz der vier betrachteten Eigenschaften genügt es für beiden gegebenen Matrizen A und B eine Bedingung an ihre Koeffizienten zu ermitteln, welche zur Beziehung $A\,B = B\,A$ gleichwertig ist. Wir erhalten zum einen

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d_1 \\ d_2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot c + b_1\cdot d_2 & a\cdot d_1 + b_1\cdot c \\ b_2\cdot c + a\cdot d_2 & b_2\cdot d_1 + a\cdot c \end{pmatrix}$$

sowie zum anderen

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} c & d_1 \\ d_2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b_1 \\ b_2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a + d_1 \cdot b_2 & c \cdot b_1 + d_1 \cdot a \\ d_2 \cdot a + c \cdot b_2 & d_2 \cdot b_1 + c \cdot a \end{pmatrix}.$$

Die beiden Matrizen $A\,B$ und $B\,A$ sind genau dann gleich, wenn sie in allen Einträgen übereinstimmen. Da die Einträge auf der Nebendiagonale stets übereinstimmen, müssen wir nur noch überprüfen, unter welcher Bedingung auch die Einträge auf der Hauptdiagonale übereinstimmen; dies ist genau aber dann der Fall, wenn $b_1 \cdot d_2 = d_1 \cdot b_2$ gilt.