

Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{I}} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}+3\cdot\text{III}} \\ & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar; genauer ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die drei gebundenen Variablen x_1 , x_2 und x_4 dann

- $x_1 - 5x_3 = -5$, also $x_1 = -5 + 5x_3 = -5 + 5\lambda$,
- $x_2 + 2x_3 = 3$, also $x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2\lambda$, und
- $x_4 = 1$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c} -5 + 5\lambda \\ 3 - 2\lambda \\ \lambda \\ 1 \end{array} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

b) Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{IV}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{I}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Damit sind x_3 und x_4 freie Variablen, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ und $x_4 = \mu \in \mathbb{R}$ beliebig erhalten wir für die beiden gebundenen Variablen x_1 und x_2 dann

- $x_1 - 2x_3 = 1$, also $x_1 = 1 + 2\lambda$, und
- $x_2 - 2x_4 = -1$, also $x_2 = -1 + 2\mu$;

folglich ist also

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 + 2\lambda \\ -1 + 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{array} \right) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems.

2. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + (\lambda + 1)x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 &= 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 &= 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + 2\lambda x_4 &= 1 \end{aligned}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\lambda|b_\lambda)$. Es ist

$$\begin{aligned}
 (A_\lambda|b_\lambda) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2\lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda+1 & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & 2\lambda & 2\lambda & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2\lambda & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{II-I} \\ \text{III-I, IV-I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{I-IV} \\ \text{II-IV, III-IV}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{I-III} \\ \text{II-III}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-\lambda \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\lambda = 0$ ist

$$(A_0|b_0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

wegen des Pivots in der letzten Spalte ist das durch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_0|b_0)$ gegebene lineare Gleichungssystem unlösbar.

- Für $\lambda \neq 0$ enthält die letzte Spalte keinen Pivot, so daß das durch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\lambda|b_\lambda)$ gegebene lineare Gleichungssystem lösbar ist; da keine der Variablen frei ist, ist es sogar eindeutig lösbar, und mit

$$(A_\lambda|b_\lambda) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{III} \cdot \frac{1}{\lambda} \\ \text{IV} \cdot \frac{1}{\lambda}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

erhält man die Lösung

$$x_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Für das gegebene lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_a|b)$. Es ist

$$\begin{aligned}
 (A_a|b) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & a & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}+a\cdot\text{I}]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2 \\ -2 & 2 & a & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}+2\cdot\text{I}]{\sim} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}\leftrightarrow\text{II}]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 1+a & 2+a & 2+a \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}\cdot 4]{\sim} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 4(1+a) & 4(2+a) & 4(2+a) \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-(1+a)\cdot\text{II}]{\sim} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2+a & 5 \\ 0 & 0 & (3-a)(2+a) & 3-a \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ ist $3 - a \neq 0$ und $2 + a \neq 0$, und wir erhalten
 - $(3 - a)(2 + a)x_3 = (3 - a)$, also $x_3 = \frac{1}{2+a}$,
 - $4x_2 + \frac{2+a}{2+a} = 5$, also $x_2 = 1$,
 - $x_1 + 1 + \frac{1}{2+a} = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{2+a}$.

Damit besitzt das gegebene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung mit

$$L_a = \left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2+a} \\ 1 \\ \frac{1}{2+a} \end{array} \right) \right\}.$$

- Für $a = -2$ gilt

$$(A_{-2}|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right);$$

wegen des Widerspruchs in der dritten Zeile ist das gegebene lineare Gleichungssystem für $a = -2$ unlösbar.

- Für $a = 3$ gilt

$$(A_3|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

damit ist x_3 eine freie Variable, und mit $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig ergibt sich $4x_2 + 5\lambda = 5$, also $x_2 = \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda$ sowie $x_1 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda + \lambda = 1$, also $x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda$. Somit ist

$$L_3 = \left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda \\ \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda \\ \lambda \end{array} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge des durch $(A_3|b)$ gegebenen Gleichungssystems.

4. Für das gegebene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rccccrcr} 2x_1 & + & x_2 & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

betrachten wir die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $(A_\alpha|b_\beta)$. Es ist

$$\begin{aligned} (A_\alpha|b_\beta) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II}-\frac{1}{2}\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\frac{2}{3}\text{II}} \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array} \right) \xrightarrow{\text{IV}-\frac{3}{4}\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{3}{4} & \beta \end{array} \right) \end{aligned}$$

wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

- Für $\alpha \neq \frac{3}{4}$ ist $\alpha - \frac{3}{4} \neq 0$, und die rechte Seite enthält keinen Pivot; damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und da keine der Variablen frei ist, besitzt es genau eine Lösung.
- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta \neq 0$ enthält die rechte Seite einen Pivot; damit ist das lineare Gleichungssystem unlösbar, es besitzt keine Lösung.
- Für $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta = 0$ enthält die rechte Seite keinen Pivot; damit ist das lineare Gleichungssystem lösbar, und da die Variable x_4 frei ist, besitzt es mehrere Lösungen. Es ist

$$\left(A_{\frac{3}{4}}|b_0 \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

und mit $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig erhält man

- $\frac{4}{3}x_3 + x_4 = 0$, also $x_3 = -\frac{3}{4}\lambda$,
- $\frac{3}{2}x_2 + x_3 = 0$, also $x_2 = \frac{1}{2}\lambda$, und
- $2x_1 + x_2 = 0$, also $x_1 = -\frac{1}{4}\lambda$,

und folglich die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{4}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda \\ -\frac{3}{4}\lambda \\ \lambda \end{array} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$